A Quoi Servent (et Que Sont) les Mathématiques ?

(les Mathématiques, une fenêtre ouverte sur l'Univers et au-delà)

Jean-François COLONNA

www.lactamme.polytechnique.fr

jean-francois.colonna@polytechnique.edu
CMAP (Centre de Mathématiques APpliquées) UMR CNRS 7641, Ecole Polytechnique, CNRS, 91128 Palaiseau Cedex, France

[Site Map, Help and Search [*Plan du Site, Aide et Recherche*]]
[The Y2K Bug [*Le bug de l'an 2000*]]
[Do you believe that Real Numbers exist for a computer and that floating point computations are safe ? [*Croyez-vous que les Nombres Réels existent dans un ordinateur et que les calculs flottants sont sûrs ?*]]
[N'oubliez pas de visiter *Une Machine Virtuelle à Explorer l'Espace-Temps et au-delà* où vous trouverez plusieurs milliers d'images et d'animations à la frontière de l'Art et de la Science]
(Site WWW CMAP28 : cette page a été créée le 09/23/2009 et mise à jour le 02/05/2022 12:53:22 -CEST-)

[voir la version "arborescente" de cette page]
[voir une version plus "étoffée" de cette page]

(**Plan d'une conférence** donnée à de nombreuses reprises : la première fois au cours de la Fête des Mathématiques (*Maths en Rue*) organisée par la Ville de Bruxelles -Belgique-, Hôtel de Ville de Bruxelles (16/10/2009) et plus récemment, en tant que conférence de clôture du vingt-deuxième congrès MATh.en.JEANS, Université de Vienne -Autriche- (15/05/2011), à la journée Science de la Principauté d'Andorre (02/04/2014), au Lycée Louis le Grand de Paris en tant que conférence d'ouverture de la semaine des Mathématiques (16/03/2015),...)

Résumé : Souvent considérées comme inutiles, les Mathématiques, sans que nous en ayons toujours conscience, sont omniprésentes dans la vie courante (téléphone portable, DVD, MP3, photographie numérique, GPS,...). Mais elles sont surtout le langage de la Physique et leur redoutable efficacité dans ce domaine est peut-être un révélateur de leur nature profonde. Aujourd'hui, puissamment secondées par les ordinateurs, elles peuvent aussi être considérées, à côté du microscope et du télescope, comme un "instrument d'optique" qui chaque jour nous révèle de nouveaux et mystérieux aspects de notre Univers/Multivers. De nombreux exemples empruntés à la Mécanique Quantique, à la Mécanique Céleste ou encore à la Géométrie Fractale seront présentés. Le côté "obscur" des machines sera ensuite évoqué. Enfin, la nécessité de la recherche (fondamentale comme appliquée) sera rappelée, les différentes crises que nous traversons actuellement en soulignant l'importance vitale.

Mots-Clefs : Anaglyphes, Art et Science, Autostéréogrammes, Chaos Déterministe, Création Artistique, Entrelacs, Erreurs d'arrondi, Expérimentation Virtuelle, Génie Logiciel, Géométrie Fractale, Infographie, Mathématiques, Mécanique Céleste, Mécanique Quantique, Physique, Sensibilité aux Erreurs d'Arrondi, Simulation Numérique, Stéréogrammes, Synthèse de Phénomènes Naturels, Synthèse de Texture, Visualisation Scientifique, Voyage Virtuel dans l'Espace-Temps.

1-LES MATHEMATIQUES PURES, UN "SIMPLE" (ET INUTILE ?) JEU DE L'ESPRIT :

- **LES MATHEMATIQUES SONT UN SYSTEME FORMEL :**
  - **UNE LISTE DE SYMBOLES :**
    - A B C D E F...
    - a b c d e f...
    - α β γ δ ε ζ...
    - 0 1 2 3 4 5...
    - + - * / = ()...
    - etc...
  - **LA LOGIQUE DES PREDICATS (ou *CALCUL DES PREDICATS DU PREMIER ORDRE*) :**
    - Un langage formalisé universel, simple et suffisant pour permettre l'expression de TOUS les concepts mathématiques.
    - Des constantes et des variables.
    - Les *foncteurs* : "*non*", "*et*", "*ou*", "*implique*" et "*équivalent*".
    - Deux *quantificateurs* : "*il existe*" et "*pour tout*".
    - Des *prédicats*, c'est-à-dire des propriétés dont la vérité dépend d'une ou plusieurs variables. Par exemple :

      ```
      PAIR(x) est VRAI si 'x' est un entier pair et FAUX dans les autres cas.
      ```
    - Une syntaxe qui permet d'écrire des *propositions* (VRAIES ou FAUSSES).
    - Toute proposition est soit VRAIE, soit FAUSSE (*principe du tiers exclu* -inutilisé en *logique intuitionniste*-).
    - Aucune proposition ne peut être à la fois VRAIE et FAUSSE (*principe de non contradiction*).
    - etc...
  - **LES QUATRE TYPES DE PROPOSITIONS :**
    - **Un petit nombre d'axiomes** (des propositions fondamentales et non démontrables mais acceptées par tous) sur lesquels repose la structure "pyramidale" infinie des Mathématiques :

      - **L'arithmétique élémentaire de Peano** :
        - L'élément appelé *zéro* et noté 0 est un entier naturel.
        - Tout entier naturel *n* a un successeur noté S(n).
        - Auncun entier naturel n'a 0 pour successeur.
        - [S(m)=S(n)] ==> [m=n].
        - etc...
        - L'ensemble des nombres entiers est alors :

          ```
          {0,S(0),S(S(0)),S(S(S(0))),S(S(S(S(0)))),S(S(S(S(S(0))))),S(S(S(S(S(S(0)))))),S(S(S(S(S(S(S(0))))))),...}
             |__| |____| |______| |________| |__________| |____________| |______________|
          ```

          que l'on note le plus souvent :

          ```
          {0,1,2,3,4,5,6,7,...}
          ```
      - **La théorie des ensembles ZFC -Zermelo, Fraenkel, axiome du choix-** :
        - Il existe un ensemble dont aucun ensemble n'est élément (*axiome de l'ensemble vide*).

- Deux ensembles possédant les mêmes éléments sont égaux.
- etc...

- **La géométrie euclidienne** :
  - Par deux points distincts du plan il passe une droite et une seule.
  - Dans un plan, étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première (*axiome des parallèles*).
  - etc...

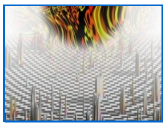
- etc...

- **Des théorèmes** (c'est-à-dire des propositions démontrées comme étant VRAIES).

- **Des conjectures** (c'est-à-dire des propositions en attente de démonstration -ou de réfutation !-).

- **Des indécidables** (c'est-à-dire des propositions dont on ne peut dire ni si elles sont VRAIES, ni si elles sont FAUSSES).

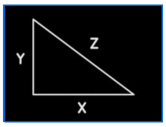
- **LES MATHEMATIQUES PEUVENT ETRE VUES COMME UN JEU TEL LES ECHECS :**



  - **Une liste de symboles** : L'échiquier et les différentes pièces (blanches et noires).
  - **Une syntaxe** et **les règles de la logique** : Les déplacements autorisés des différents types de pièces.
  - **Un petit nombre d'axiomes** : L'unique configuration initiale possible des pièces sur l'échiquier.
  - **Des théorèmes** : Les configurations possibles (c'est-à-dire accessibles depuis la configuration initiale) des pièces sur l'échiquier.
  - **Des conjectures** : Les configurations (*a priori* quelconques) des pièces sur l'échiquier (sont-elles accessibles ?).

- **VERIFICATIONS, DEMONSTRATIONS ET INFINIS...**
  - **Une vérification n'est pas une démonstration !**
  - **Une démonstration "manipule" globalement et implicitement une infinité de cas...**
  - Voir le **Théorème de Pythagore** à titre d'exmple.

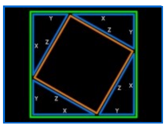
- **UN EXEMPLE, LE THEOREME DE PYTHAGORE :**



Le théorème de Pythagore affirme que ***dans tout triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés*** :

$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

Une démonstration parmi d'autres :



Une démonstration valable pour une **infinité** de triangles rectangles !

Alors que sa vérification est en fait impossible ! Il faudrait d'une part, pouvoir dessiner un triangle rectangle parfait (c'est-à-dire possédant exactement un angle droit et des côtés d'épaisseur nulle, alors que la démonstration peut se contenter d'une figure approximative) et d'autre part être capable de faire des mesures et des calculs d'une précision infinie. Enfin, cette vérification pour **un triangle particulier** ne prouverait rien en ce qui concerne **tous les autres -une infinité-**...

- **AUJOURD'HUI, LES MATHEMATIQUES PURES SEMBLENT PUISER QUASIMENT TOUTE LEUR INSPIRATION DANS DES PROBLEMES**

DECONNECTES DU "REEL" :

- **Faire de la recherche (en Mathématiques)** : C'est se poser de bonnes questions puis tenter d'y répondre...

- **Quelques problèmes "élémentaires" (à formuler...) dits *ouverts* et donc à l'état de *conjectures*** :

  -  **La conjecture de Syracuse** (Lothar Collatz 1928) : l'observation simple suivante a été faite et répétées ensuite de nombreuses fois grace aux ordinateurs. Partant d'un entier N quelconque, s'il est pair, on le divise par 2 (N/2) et dans le cas contraire (il est donc impair), on le multiplie par 3 et on ajoute 1 (3xN+1). Ce processus est ensuite répété sur le nouveau nombre obtenu. Beaucoup de nombres entiers ont donc pu être testés (mais si peu par rapport à l'infini !) et il apparait que l'on arrive systématiquement à la suite {4,2,1} qui se répète ensuite indéfiniment.

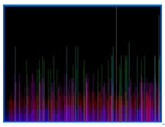
```
si N est Pair   : N --> N/2

si N est Impair : N --> 3xN+1
```

Ainsi, par exemple, partant de 12, on obtient :

```
12
  \
   P
    \
     12/2 = 6             3x3+1 = 10              3x5+1 = 16
             \           /          \            /          \
              P         I            P          I            P
               \       /              \        /              \
                6/2 = 3                10/2 = 5                16/2 = 8
                                                                       \
                                                                        P
                                                                         \
                                                                          8/2 = 4 <-----------------------------.
                                                                                 \                              |
                                                                                  P                             |
                                                                                   \                            |
                                                                                    4/2 = 2             3x1+1 = 4
                                                                                           \           /
                                                                                            P         I
                                                                                             \       /
                                                                                              2/2 = 1

(I=Impair, P=Pair)
```

Mais cela est-il vrai pour tous les nombres entiers ?

On peut remarquer qu'au cours de ce processus, on obtient plus de nombres pairs que de nombres impairs. En effet, d'une part lorsque N est impair 3xN+1 est pair. D'autre part, si N est pair, N/2 est pair avec une probabilité égale à 1/2. Il doit donc y avoir environ trois nombres pairs pour un nombre impair...

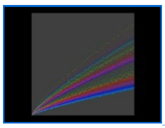
  -  **La conjecture des nombres premiers jumeaux** (fait partie du huitième problème de Hilbert -1900-) : Il y a une infinité de nombres entiers, il y a une infinité de nombres premiers. Mais y-a-t'il une infinité de nombres premiers jumeaux ?

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,... INFINI
   |__|__|  |____|  |____|      |____|

{3,5}, {5,7}, {11,13}, {17,19}, {29,31},... INFINI ?
```

Pour cette conjecture l'ordinateur n'est *a priori* que de peu d'utilité car, en effet, d'une part les ordinateurs n'ont qu'une capacité finie (même si elle peut être phénoménale...) et ils ne peuvent donc manipuler l'ensemble infini des nombres premiers. D'autre part, la notion de contre-exemple n'a pas de sens ici (une longue absence de couples de nombres premiers jumeaux ne prouverait évidemment pas que cette absence se poursuit indéfiniment : **l'absence de preuve n'est pas la preuve de l'absence**...).

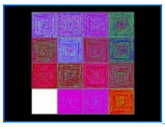
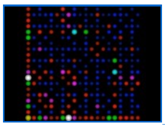
Et qu'en est-il des "nombres premiers triplés" (et au-delà...) ?

```
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,... INFINI
   |__|__|

{3,5,7},... INFINI ?
```

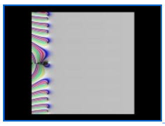
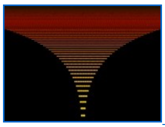
  -  **La conjecture de Goldbach** (Christian Goldbach et Leonhard Euler -1742-, fait partie du huitième problème de Hilbert -1900-) : Tout nombre pair strictement supérieur à 2 serait, au moins d'une façon, la somme de deux nombres premiers.

```
4   = 2+2
6   = 3+3
8   = 3+5 [= 5+3]
10  = 3+7 = 5+5 [= 7+3]
(...)
990 = 7+983 = 13+977 = 19+971 = 23+967 = 37+953 = 43+947 = 53+937 = 61+929 = 71+919 = 79+911 = 83+907 = 103+887 = 107+883 = 109+881
(...)
```

Contrairement à la conjecture des nombres premiers jumeaux, en ce qui concerne celle de Goldbach, l'ordinateur pourrait permettre de trouver un contre-exemple (c'est-à-dire un nombre pair non décomposable additivement). Mais s'il en existe un, la probabilité pour qu'il nous soit accessible est quasiment nulle (en fait tous les nombres entiers sont énormes voire inimaginables, sauf évidemment les premiers : ceux que l'on utilise dans la vie courante...).

-  **La conjecture de la persistance multiplicative**.
-  **La conjecture ABC** (David Masser, Joseph Oesterlé 1985-1988 ; peut-être résolue par Shinichi Mochizuki en 2012).

◦ **Les vingt-trois problèmes de David Hilbert** (second Congrès International des Mathématiciens, Paris, août 1900). Des problèmes "plus difficiles" (à expliquer), plusieurs d'entre-eux n'étant toujours pas résolus et par exemple :

-  **L'hypothèse de Riemann** (Bernhard Riemann 1859, fait partie du huitième problème de Hilbert).
-  **HC, l'Hypothèse du Continu** (Georg Cantor ~1890, premier problème de Hilbert) :
  - Deux ensembles (finis ou infinis) ont la même taille (ou *cardinal*) s'il existe une bijection entre-eux.
  - **Un ensemble E a donc la même taille que N (ensemble infini des entiers) s'il est possible de numéroter (1, 2, 3, 4,...) les éléments de E**. Ainsi, par exemple :
    - Il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers :

```
                             --------------------------------------------------------------------
                            |                                                                    |
Nombres Pairs :             |   2   4   6   8  10  12  14  16  18  20  22  24  26  28  30  32 ... |
                            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
                             --------------------------------------------------------------------
                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
                             --------------------------------------------------------------------
                            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
Numéros (Nombres Entiers) : |   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14  15  16 ... |
                            |                                                                    |
                             --------------------------------------------------------------------
```

    - Il y a autant de nombres premiers que de nombres entiers :

```
                             --------------------------------------------------------------------
                            |                                                                    |
Nombres Premiers :          |   2   3   5   7  11  13  17  19  23  29  31  37  41  43  47  53 ... |
                            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
                             --------------------------------------------------------------------
                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
                                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
                             --------------------------------------------------------------------
                            |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
Numéros (Nombres Entiers) : |   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14  15  16 ... |
                            |                                                                    |
                             --------------------------------------------------------------------
```

    - Il y a autant de nombres rationnels positifs que de nombres entiers :

```
                             --------------------------------------------------------------------
                            |                                                                    |
Nombres Rationnels > 0 :    |   1/1  2/1  1/2  1/3  3/1  4/1  3/2  2/3  1/4  1/5  5/1  5/2 ...   |
                            |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |        |
                             --------------------------------------------------------------------
                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                             --------------------------------------------------------------------
                            |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |        |
Numéros (Nombres Entiers) : |    1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11   12 ...     |
                            |                                                                    |
                             --------------------------------------------------------------------
```

et il y a donc évidemment autant de nombres rationnels que de nombres entiers :

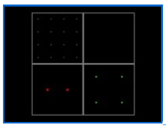
```
                             ----------------------------------------------------------------------
                            |                                                                      |
Nombres Rationnels :        |  +1/1 -1/1 +2/1 -2/1 +1/2 -1/2 +1/3 -1/3 +3/1 -3/1 +4/1 -4/1 ...    |
                            |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |          |
                             ----------------------------------------------------------------------
                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
                             ----------------------------------------------------------------------
                            |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |          |
Numéros (Nombres Entiers) : |    1    2    3    4    5    6    7    8    9   10   11   12 ...      |
                            |                                                                      |
                             ----------------------------------------------------------------------
```

- Il y a autant de nombres algébriques (définis comme étant les solutions réelles d'équations polynomiales à coefficients entiers) que de nombres entiers.

- **Mais il est impossible de numéroter les nombres réels dans [0,1]** (et donc *a fortiori* dans R) -un raisonnement par l'absurde-...
  Il y a donc (beaucoup, énormément,...) plus de nombres réels que de nombres entiers !

- R^1, R^2,... R^n,... ont même cardinal.

- Georg Cantor (~1890) : **il n'y a pas de cardinal entre celui de N (les nombres entiers) et celui de R (les nombres réels)**. C'est l'**H**ypothèse du **C**ontinu (**HC**).

  -  Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble donné.

  - Kurt Gödel (1938) : la négation de HC ne peut être démontrée dans le cadre de la théorie standard des ensembles (ZFC -**Z**ermelo, **F**rankel, axiome du **C**hoix-).

  - Paul Cohen (1963) : HC ne peut être démontrée dans ZFC.

  - HC est donc un **indécidable** de ZFC : de nouveaux **axiomes** doivent donc être introduits (mais lesquels ?). Pour Hugh Woodin -le plus grand spécialiste actuel du sujet-, HC est vraie...

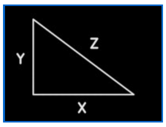
  - Alors, plusieurs théories des ensembles -un multivers ensembliste- comme il y a plusieurs géométries (suivant le contenu de l'axiome dit *des parallèles*) ?

- **De rares exceptions** :

  - Les équations de Navier-Stokes de la Mécanique des fluides (Henri Navier et George Stokes, XIXe siècle) figurent parmi les sept *problèmes du millénaire* de la Fondation Clay (2000).

- **De PYTHAGORE (-VIe siècle) à SIR ANDREW WILES (1994), en passant par DIOPHANTE d'ALEXANDRIE (IIIe siècle), CLAUDE GASPARD BACHET de MEZIRIAC et PIERRE de FERMAT (XVIIe siècle) :**

  - **Le théorème de Pythagore**.



$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

  - **Les équations diophantiennes**. L'équation :

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

a une infinité de solutions entières {X,Y,Z} et, par exemple, la plus fameuse d'entre-elles :

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

ou encore :

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

$$8^2 + 15^2 = 17^2$$

$$9^2 + 12^2 = 15^2$$

$$12^2 + 16^2 = 20^2$$

(...)

  - **Le grand "théorème" de Fermat**. L'équation :

$$X^n + Y^n = Z^n \qquad \{X,Y,Z,n\}\ E\ N \qquad X.Y.Z\ \#\ 0$$

n'a pas de solutions entières {X,Y,Z} pour n=0 et n>2.

  - **Le chemin parcouru peut être plus enrichissant que la destination elle-même**.

  - **Des applications *a posteriori*** : Courbes elliptiques (conjecture Shimura-Taniyama-Weil démontrée en grande partie par Andrew Wiles) et cryptographie,...

2-LES MATHEMATIQUES APPLIQUEES A LA CONNAISSANCE DE LA REALITE :

2.1-LE PHYSICIEN, OBSERVATEUR ET ARPENTEUR DE L'UNIVERS :

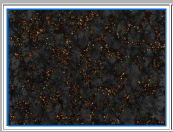
- Le sens de la **vision** à l'origine de la curiosité scientifique : les régularités, les symétries, les invariances,... Que serait notre Science sans nos yeux ?

- L'acte premier et fondamental de la **mesure**.

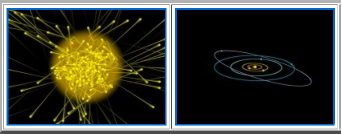
- Le Physicien est un **explorateur** de l'Univers, du Multivers,...

- **La Physique aujourd'hui :**

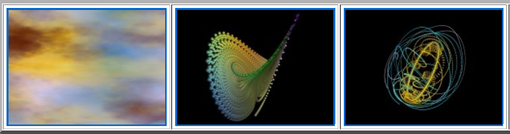
`$8.8\ 10^{+26}$ mètres`



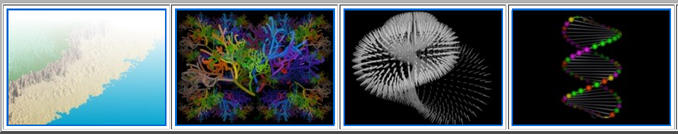
L'Univers observable et au-delà...



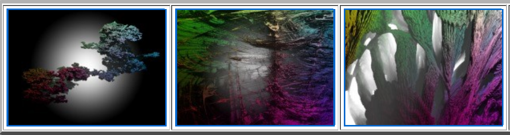
Les étoiles et les systèmes planétaires.



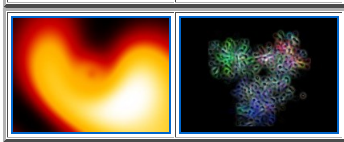
Turbulence et Chaos.



La Nature et la Vie, la Terre est notre Berceau.



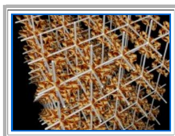
La Complexité émergeant du Chaos.



Molécules, Atomes et Particules Elémentaires.

`$2.0\ 10^{-19}$ mètre`

Terra Incognita (Mathematica ?)...



L'Espace-Temps, l'Echelle de Planck et au-delà...

`$1.6\ 10^{-35}$ mètre`

2.2-LA MODELISATION (*LES MATHEMATIQUES, UN LANGAGE ET UNE MEMOIRE*) :

- **Mathématiques** : du grec *Mathêma* (*science, connaissance*).

- **Que sont donc les Mathématiques ?**

1-**Un jeu de l'esprit** (sans en chercher d'interprétations ou encore d'applications) ?

2-**Un ensemble d'analogies** (la Géométrie Fractale en donne des exemples) ?

3-**Un outil de compression de mesures**, la régularité impliquant la compressibilité (la compression JPEG des images -les images naturelles n'étant pas aléatoires- ou encore les lois de Kepler illustrent cela) ? Cela provoquant l'**émergence de lois** en sautant d'un niveau de description N au niveau N+1 : c'est, par exemple, le cas en passant du mouvement d'un nombre énorme de molécules aux "simples" lois de la Thermodynamique et à des notions macroscopiques comme la température (voir la notion d'entropie).

Le Rasoir d'Occam joue alors un rôle essentiel :

```
Soit la suite {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32}. Quel modèle la décrit le plus "économiquement" ?


M1 - Calcul des entiers naturels pairs                                          : {n | n=0 ; {n=n+2} ; n<=30},
M2 - Calcul du double des entiers naturels                                      : {s | n=0 ; {s=2*n ; n=n+1} ; n<=15},
M3 - Calcul de la partie entière d'un certain polynôme P(n)                     : {PartieEntière(P(n)) | n=0 ; {P(n)=2*n + 0.004*n^2 ; n=n+1} ; n<=15},
(...)
Mi - Calcul de la valeur absolue des zéros triviaux de la fonction Zêta de Riemann : {mod(z) | Zeta(z)=0, Im(z)=0},
(...)


M1 est le modèle à privilégier comme étant le plus simple.
```

4-**LE langage de l'Univers**, d'hier (Galilée, XVI-XVIIe siècles) à aujourd'hui ?

5-**Un peu tout cela à la fois** ?

6-Ou bien tout autre chose : **les Mathématiques seraient-elles une "approximation" de la Physique -c'est-à-dire de notre connaissance de la Réalité-** ?

7-Ou "pire" : **les Mathématiques seraient-elles LA Réalité** (Max Tegmark, MIT) ?

- **La Physique semble être la même aux "quatre coins de l'Univers", mais est-ce aussi le cas des Mathématiques ?**

- Le Mathématicien : **créateur** (*celui qui tire du néant...*) ou **explorateur** (*celui qui parcourt en observant*) ou bien **les deux à la fois** ?
  - "Les Mathématiques sont-elles semblables à l'Amérique du Nord (qui existe *a priori* indépendamment de l'Homme) ou bien à New York (qui n'existerait pas sans l'Homme) ?"
  - S'il est créateur, pourquoi cette redoutable efficacité des Mathématiques (Eugène Wigner -prix Nobel de Physique 1963-, 1960) ?
  - S'il est explorateur, où sont-elles et comment y accède-t-il (ces questions ne sont pas plus embarassantes que celles de savoir où est notre Univers, où est notre Multivers !) ?
  - Des "atomes" mathématiques universels aux "molécules" mathématiques anthropiques (Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme", Leopold Kronecker, 1891) ?
  - Un contact avec d'hypothétiques intelligences extra-terrestres pourrait peut-être repondre à cette question !

- **Les Mathématiques peuvent-elles répondre à toutes les questions ?**
  - Dans le cas où les Mathématiques ne sont pas notre création, "qui" en est à l'origine ?
  - Pourquoi quelque chose plutot que rien ?
  - Qu'est-ce que la non existence ?
  - Qu'est-ce que le beau ?
  - etc...

- **Que pensez de l'arbitraire des axiomes ou encore de l'incomplétude de Kurt Gödel** (il existe des propositions dont on ne peut dire ni si elles sont vraies, ni si elles sont fausses : l'Hypothèse du Continu (HC) en est un bon exemple ?)

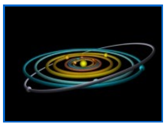
- **Les Mathématiques sont aussi le langage de l'industrie** :
  - La téléphonie mobile.
  - La photographie numérique.
  - Le GPS.
  - La conception et les tests (aérodynamiques, écologiques, de consommation, de résistance,...) dans les industries de l'automobile, de l'aéronautique, de l'espace,...

2.3-LA PREDICTION (*LES MATHEMATIQUES, UNE PENSEE*) :

- ***On ne peut échapper au sentiment que ces formules mathématiques ont une existence qui leur est propre, qu'elles sont plus savantes que ceux qui les ont découvertes, et que nous pouvons en extraire plus de science qu'il n'en a été mis à l'origine*** (Heinrich Hertz, XIXe siècle).

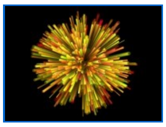
- **La gravitation newtonienne :**

  En 1846, Urbain Le Verrier découvre **la planète Neptune** grâce à la Mécanique newtonienne.

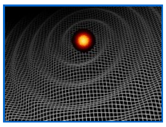


- **La gravitation einsteinienne :**

Après avoir publié en 1905 la Théorie de la Relativité Restreinte (ainsi que trois autres articles fondamentaux relatifs à l'effet photoélectrique, au mouvement brownien et à l'équivalence masse-énergie), Albert Einstein publia en 1915 la Théorie de la Relativité Générale qui permettra de montrer (Georges Lemaître) que, contrairement à son intime conviction, l'Univers a une Histoire. Cette prédiction (l'**expansion de l'Univers**) sera vérifiée quelques années plus tard par l'astronome Edwin Hubble. Aujourd'hui, Andrei Linde propose une structure fractale "multivers" en perpétuelle création-évolution.



Une prédiction de nature purement mathématique, celle des **ondes gravitationnelles**, faite par Albert Einstein dans le cadre de cette théorie, s'est vue confirmée expérimentalement et magistralement un siècle plus tard (LIGO, le 14/09/2015), alors que lui-même était convaincu de l'impossibilité technique de cela...

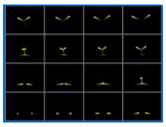


On notera une différence fondamentale entre la découverte expérimentale de l'expansion de l'Univers et celle des ondes gravitationnelles. La première aurait très bien pu être observée par Edwin Hubble (ou un autre...) en l'absence de la Relativité Générale : en effet, le fait que plus les galaxies sont éloignées de nous, plus elles semblent s'éloigner rapidement est un phénomène "facilement" observable, presque par hasard. Par contre les ondes gravitationnelles sont tellement faibles et noyées dans un tel bruit de fond qu'il aurait été impossible de les découvrir par accident. Ainsi, les ondes gravitationnelles sont l'exemple même d'une découverte qui, sans les Mathématiques, n'aurait pu être faite...

Une "petite" remarque au passage : sans la Relativité Générale (sans oublier la Relativité Restreinte et la Mécanique Quantique), pas de GPS !

- **L'anti-matière :**

En 1930, Paul Dirac annonce l'existence de l'**anti-électron** grâce à la Mécanique Quantique.



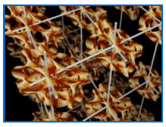
- **Prédictions et intuition :**

Des prédictions souvent contraires à l'intuition : non localité, intrication et théorème de Bell (Niels Bohr, Albert Einstein et Alain Aspect).

- **La réfutabilité (Karl Popper) :**

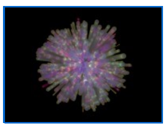
Les prédictions doivent être vérifiées par des expériences *réelles* (et non point par des expériences *virtuelles*) bien souvent fort délicates, voire impossibles. En voici quelques exemples :

  - **Un espace-temps à onze dimensions ?**



  - **Le Multivers ?**

  - **Après le "Big Bang", le "Big Crunch" ?**

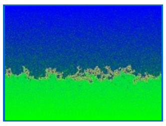


2.4-LE MATHEMATICIEN ET LE PHYSICIEN :

- L'*honnête homme* de Montaigne n'est plus...

- Le physicien pose des problèmes et émet des conjectures.

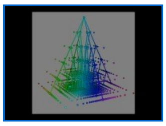
- Le mathématicien s'attaque formellement à ces problèmes :



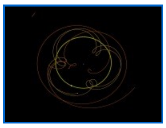
Wendelin Werner, Médaille Fields 2006.

- Tel Monsieur Jourdain et la prose, le mathématicien fait parfois (souvent ? toujours ?) de la physique sans le savoir :
  - **Evariste Galois et les groupes**,
  - **Bernhard Riemann et les variétés éponymes**,
  - **Les mathématiciens des monstres continus non différentiables (Weierstrass, Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, von Koch, Sierpinski,...)**.

- Une (LA ?) différence entre les Mathématiques et la Physique :



L'éternité des vérités des Mathématiques



face à la précarité de celles de la Physique.

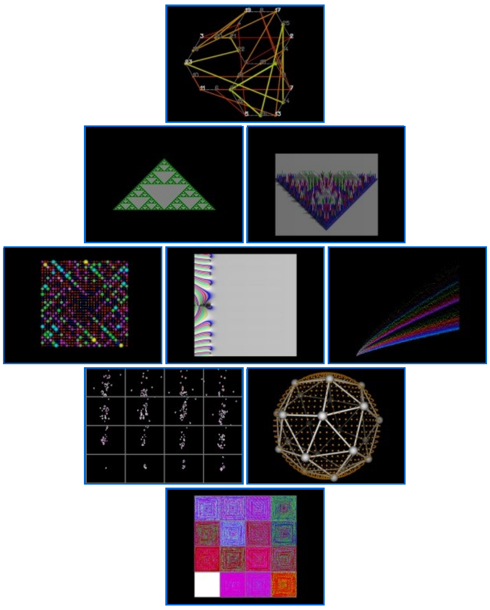
2.5-MATHEMATIQUES, CALCUL ET INFORMATIQUE :

- Les précurseurs :
  - **John Neper** (les logarithmes et la règle à calculs, XVIe-XVIIe siècles),
  - **Blaise Pascal** (l'addition, XVIIe siècle),
  - **Gottfried Wilhelm Leibniz** (la multiplication, XVIIe siècle),
  - **Jacques de Vaucanson** (les automates, XVIIe siècle),
  - **Joseph Marie Jacquard** (le métier à tisser précurseur des machines programmables -premiers supports perforés : cartes et rubans-, XVIIIe siècle),
  - **Charles Babbage** et **Lady Ada Lovelace** (le premier ordinateur -mécanique-, XIXe siècle),
  - etc...

- Les notions d'algorithme, de calculabilité et de machine à calculer programmable :
  - Le dixième problème de David Hilbert -résolubilité des équations diophantiennes- (1900),
  - **Alonzo Church** (~1930),

- **Kurt Gödel** (1931),
- **Alan Turing** (~1930),
- **John von Neumann** (~1940),
- etc...

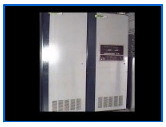
- **Les Mathématiques "expérimentales" :**



- **Le traitement de textes mathématiques.**

- **Les démonstrations et les vérifications assistées par ordinateur.**

- **Les progrès matériels et logiciels :**



- **Un rôle de plus en plus (trop ?) important pour l'informatique :**

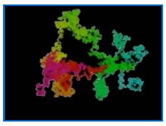
  Du *je pense donc je suis* à *je calcule donc je suis* ?

- **Mais Pythagore, Galilée, Newton, Einstein,... n'avaient pas d'ordinateurs !**

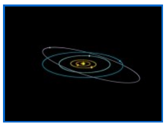
2.6-L'EXPERIMENTATION VIRTUELLE (*LES MATHEMATIQUES, UN "INSTRUMENT D'OPTIQUE" REVOLUTIONNAIRE*) :

Quelques inventions anciennes et révolutionnaires en leur temps :

- **Le microscope** :



- **Le télescope** :

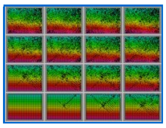
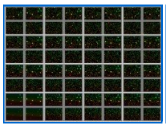
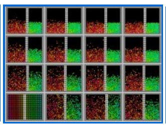
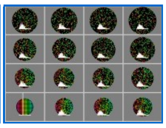
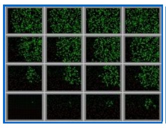
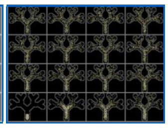


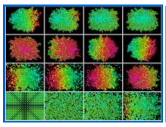
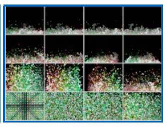
Les Mathématiques, une fenêtre grande ouverte sur l'Univers et au-delà !

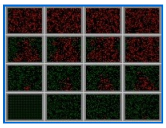
Assistées par l'ordinateur, les Mathématiques permettent d'explorer et d'expérimenter (virtuellement) sur notre Univers, mais aussi d'en imaginer d'autres.

- **L'ordinateur joue alors rôle essentiel en effectuant les calculs et en produisant les visualisations, mais ATTENTION ...**

- **Quelques expériences virtuelles simples de Mécanique Statistique** (*généraliser pour simplifier*, Jacques Hadamard).

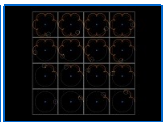
     

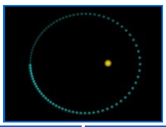
 

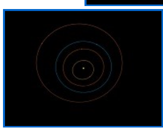


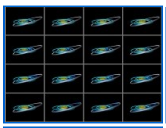
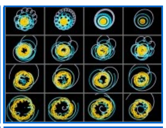
[Voir d'autres exemples]

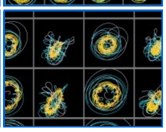
- **Une expérience de Mécanique Céleste (ou *le retour des épicycles*)**:



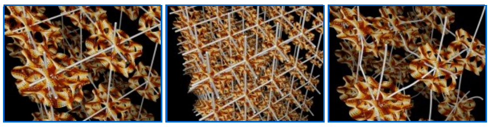
 

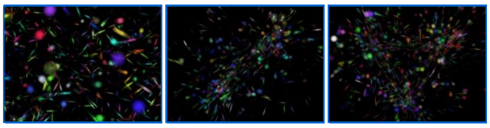
[Pour avoir plus d'explications]

- **D'autres exemples de "vues" offertes par les Mathématiques** et qui sont pour certaines en attente de validation (ou d'invalidation...) expérimentale (de l'infiniment petit à l'infiniment grand) :

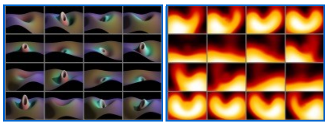
  - **Les dimensions supplémentaires de l'espace-temps ?**



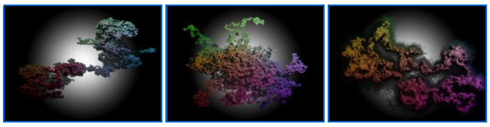
  - **Les fluctuations quantiques**.



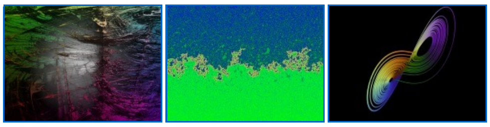
  - **Les superpositions d'états quantiques**.



  - **Le mouvement brownien**.

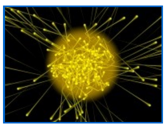


  - **Le chaos déterministe : petites causes, grands effets**.

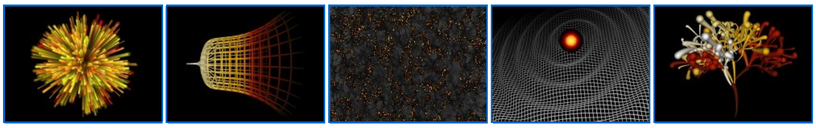


  - **L'érosion**.

  - **Au cœur du Soleil** (*connaître la composition chimique du Soleil est l'exemple même d'une connaissance qui sera à jamais inaccessible à l'intelligence humaine*, Auguste Comte, 1835).



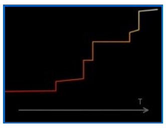
  - **L'Univers** : ses grandes structures, le *Big Bang*, l'inflation, le Multivers,... **?**



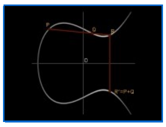
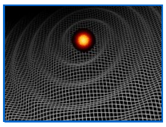
Mais attention au piège du *je calcule, donc je suis...*

2.7-UNE BRANCHE RECENTE DES MATHEMATIQUES, LA GEOMETRIE FRACTALE :

- **Un peu d'histoire des Mathématiques et de ses révolutions :**



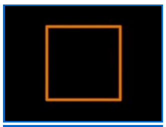
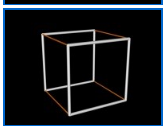
[Des succès considérables dans tous les domaines](#) :

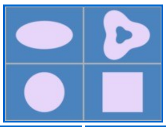
  

Et malgré tout, tant de questions sans réponses...

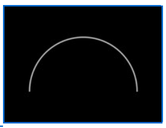
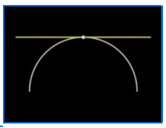
- **Quelle est la forme (au sens mathématique du terme...) d'un nuage ?**

S'il-vous-plait... dessine moi un nuage (d'après Antoine de Saint-Exupéry).

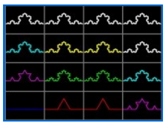
  


[Les géométries "classiques" ne peuvent répondre à cette question](#).

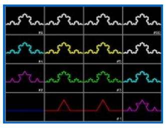
- **Au XIXe siècle, du [continu](#)**  **[différentiable](#)**  **au continu non différentiable :**

Les "monstres" de Weierstrass, Cantor, Peano, von Koch, Sierpinski,... était pour Charles Hermite une *plaie lamentable* qu'il regardait avec effroi.

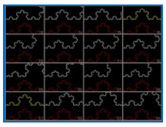


La courbe de von Koch et sa construction.

Deux propriétés extraordinaires :



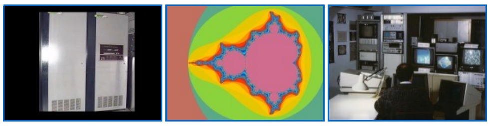
La cohabitation du fini et de l'infini.



L'autosimilarité.

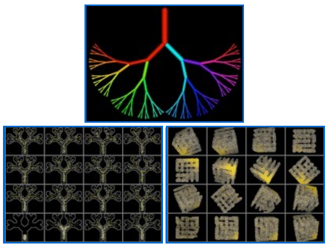
- **Au XXe siècle, de Benoît Mandelbrot à l'Universalité des fractales (Bernard Sapoval) :**

Dans la deuxième moitié du XXe siècle, l'ordinateur a joué un rôle important dans l'émergence de la Géométrie Fractale :



Les objets fractals possédent de l'irrégularité et/ou des structures à tous les niveaux et/ou une dimension non entière.

- **Formes naturelles et infini (les contraintes de la Nature) :**

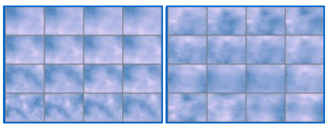


Les alvéoles pulmonaires : entre 100 et 200 mètres carrés chez l'être humain (équivalent à l'aire d'une sphère de diamètre compris approximativement entre 6 et 8 mètres !).

Pour paraphraser Albert Einstein : "*Dieu ne joue peut-être pas aux dés, mais il fait très certainement de la Géométrie fractale*"...

- **Formes naturelles et autosimilarité :**

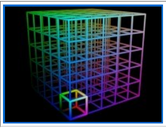
Les arbres.



Les nuages.

- **La notion de dimension fractale :**

Soit **K** un cube de côté **C** (supposé entier et strictement supérieur à 1 pour simplifier). Son volume **V** est défini par :

	
$V = C^3$	$125 = 5^3$
‖ V	‖ V
log(V) = 3 * log(C)	log(125) = 3 * log(5)
‖ V	‖ V
3 = log(V) / log(C)	3 = log(125) / log(5)

Mais :

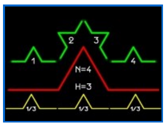
- **V** est aussi le nombre **N** de cubes *unité* **U** contenu dans **K** (ou *nombre de copies*),
- **C** est aussi le rapport d'homothétie **H** permettant de passer de **U** à **K**,
- **3** est aussi la dimension **D** de **K**.

d'où :

D = log(V) / log(C)
‖ V
D = log(N) / log(H)

Cette définition de **D** peut-être étendue à tout objet et **D** est alors appelée *dimension fractale*.

Dans le cas de la courbe de von Koch :




```
N=4 (=nombre de copies)
H=3 (=rapport d'homothétie)
```

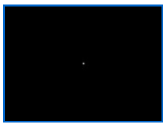
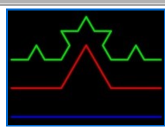
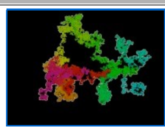
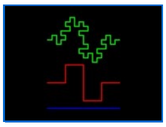
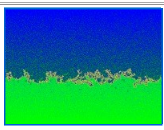
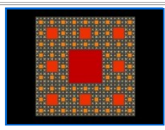
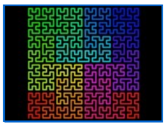
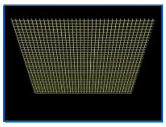
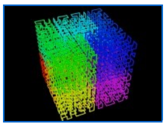
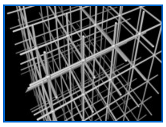
et ainsi :

```
D = log(4) / log(3)
```

Remarque :

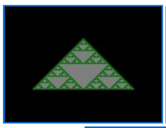
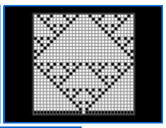
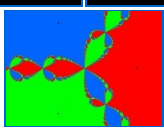
```
1 < log(4)/log(3) = 1.261859507142915 < 2     ==>     "droite < courbe de von Koch < plan"
```

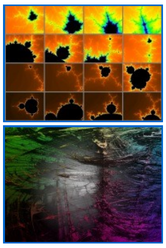
Quelques exemples d'objets classés par ordre de dimensions fractales croissantes :

 **0** : un point.	 log(2)/log(3)=**0.63**09297535714574 : l'ensemble triadique de Cantor.	 **1** : une droite.	 log(4)/log(3)=**1.26**1859507142915 : la courbe de von Koch.	 4/3=**1.33**3333333333333 : l'enveloppe du mouvement brownien bidimensionnel.
 3.2=**1.5** : la courbe de Minkowski.	 7/4=**1.75** : le front fractal de diffusion bidimensionnel.	 log(8)/log(3)=**1.89**2789260714372 : le tapis de Sierpinski.	 **2** : courbe de Hilbert bidimensionnelle.	 **2** : un plan.
 log(20)/log(3)=**2.72**683302786084 : l'éponge de Menger.	 **3** : courbe de Hilbert tridimensionnelle.	 **3** : l'espace tridimensionnel.		

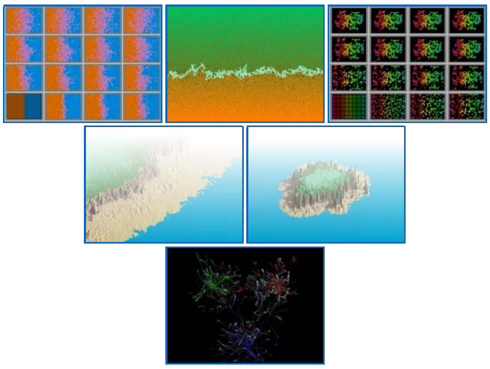
- **L'Emergence des Fractales (de l'intérêt des images !) :**

  - **En Mathématiques** :

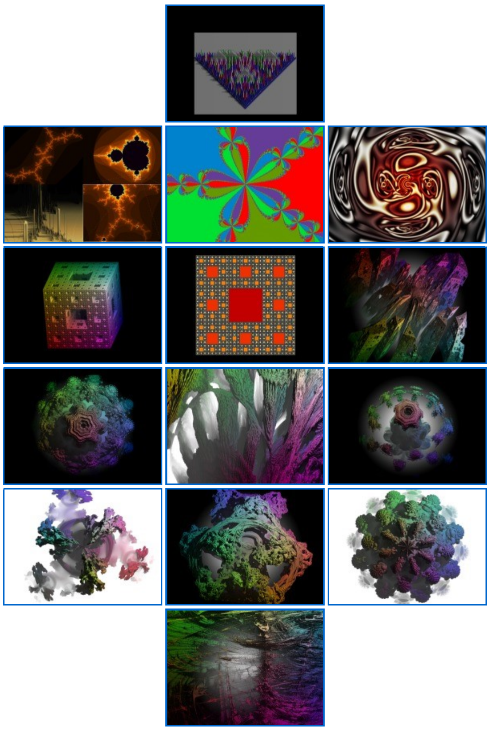






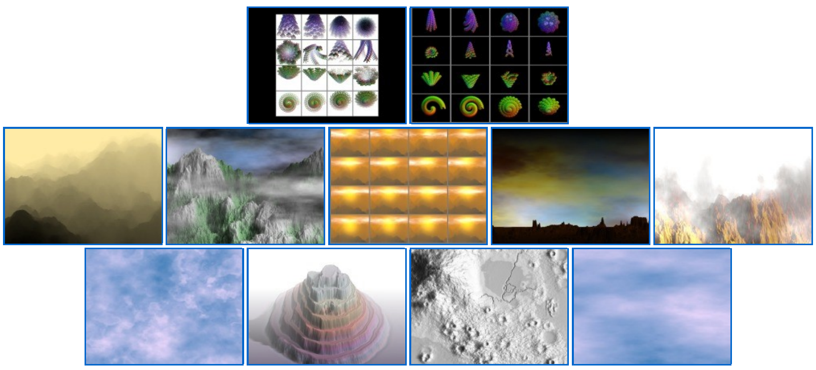
- **En Physique** :



◦ [La Géométrie Fractale déterministe]() **(Gaston Julia, Pierre Fatou, Benoît Mandelbrot, Adrien Douady, John Hubbard, Jean-Christophe Yoccoz,... XXe siècle) :**



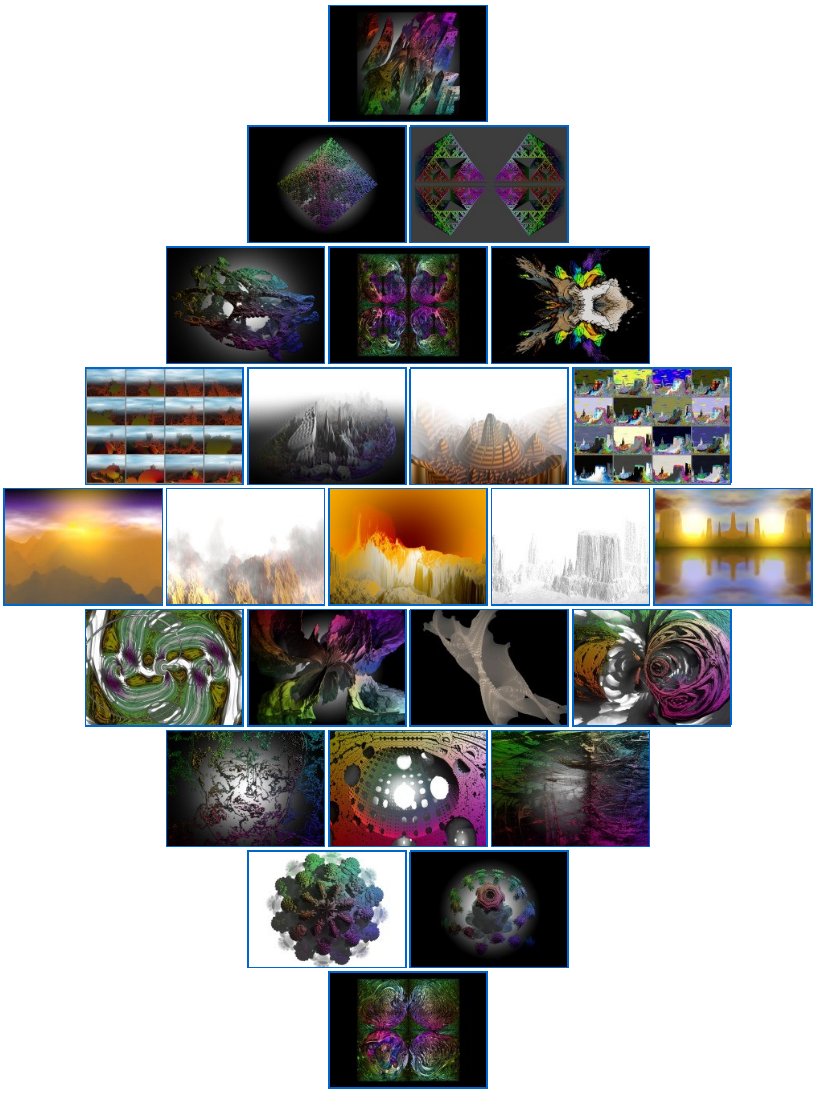
◦ [La Géométrie Fractale non déterministe]() **(Benoît Mandelbrot ~1960) :**



- **Les difficultés et les problèmes :**

- **Demain : du continu non différentiable au NON CONTINU NON DIFFÉRENTIABLE (voir en particulier le problème des erreurs d'arrondi dans nos ordinateurs) ?**

- **Les fractales et l'art :**



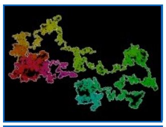
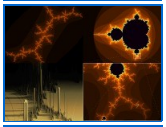
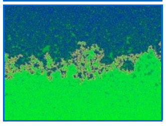
[Plus d'informations sur Arts et Mathématiques, Mathématiques et Arts]

- **La Réalité (et la Science donc...) serait-elle la [Fractale Ultime]?**

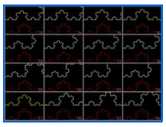
  Souvenons-nous des annonces de Lord Kelvin à la fin du XIXe siècle, quelques années avant la Mécanique Quantique et les Relativités -Restreinte et Générale- : *Il n'y a plus rien à découvrir en physique aujourd'hui, tout ce qui reste est d'améliorer la précision des mesures*...

- **En résumé :**

  - **La Géométrie Fractale est un langage commun** qui unifie en quelque sorte :

    -  Les probabilités,
    -  Les itérations,
    -  Les interfaces.

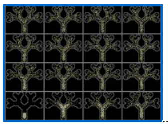
  - **La Géométrie Fractale introduit une nouvelle invariance** :

    -  L'invariance d'échelle

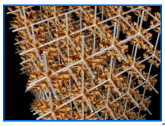
    à côté de :

    - L'invariance par translation dans l'espace -conservation de la quantité de mouvement-,
    - L'invariance par translation dans le temps -conservation de l'énergie-,
    - L'invariance par rotation -conservation du moment cinétique-.

  - **Une propriété fondamentale des objets fractals** :

    La cohabitation de **mesures à la fois finie et infinie** que cette géométrie permet (ce qu'illustre parfaitement notre système respiratoire ...). Et c'est certainement l'explication de son **omniprésence dans la nature**. On pourrait donc, pour plaisanter, compléter l'affirmation d'Albert Einstein "*Dieu ne joue pas aux dés*", en ajoutant "*mais il fait certainement de la Géométrie Fractale*"...

2.8-LES LIMITES FONDAMENTALES (DE LA CONNAISSANCE, DE NOS "OUTILS",...) :

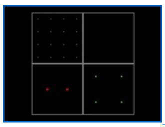
-  **Nous ne percevons pas, nous ne voyons pas toute la Réalité**. Nous ne pouvons donc pas TOUT comprendre...

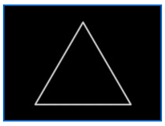
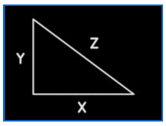
-  **De l'arbitraire des axiomes**.

- **L'incomplétude des Mathématiques** (et donc de la Physique ?), suite aux travaux de Kurt Gödel (premier et second théorèmes d'incomplétude -le premier étant basé sur une auto-référence logique du type '*je mens*' et sur le codage numérique des propositions mathématiques-). Un très bel exemple (le plus beau ?) de proposition indécidable est l'Hypothèse du Continu.

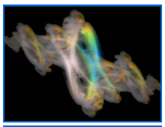
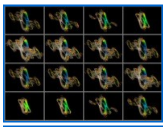
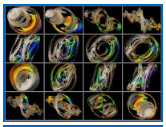
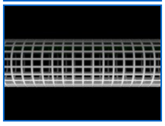
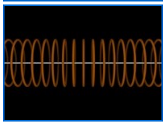
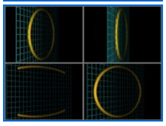
- **Du rôle essentiel des images**.

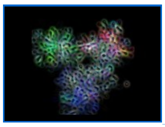
- **La difficulté, voire l'impossibilité de construire des représentations "naturelles" et uniques des objets étudiés**. Des questions difficiles, voire insensées :

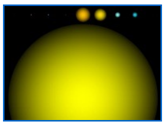
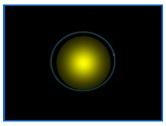
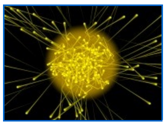
  -  Peut-on représenter les grands nombres ?

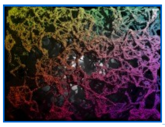
-  

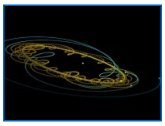
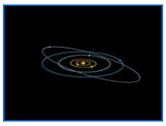
Comment représenter les objets mathématiques, même les plus élémentaires ?

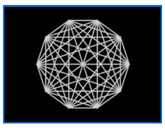
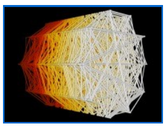
-  ==>   Comment représenter des objets N-dimensionnels (N>2) ?
 ==>   en faisant des coupes, des rotations,...

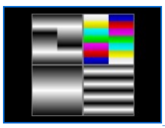
-  Quelle est la forme, quelle est la couleur d'une particule élémentaire ?

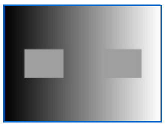
-   ==>   Peut-on toujours respecter les échelles ?

-  Peut-on visualiser l'Univers ? Que signifient les ombres portées de cette image ?

-  ==>  Comment trouver le bon point de vue ?

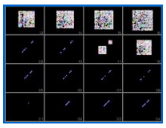
-  ==>  Comment éviter les mauvais points de vue ?

-  Quelle est la couleur des nombres (à question stupide, réponse arbitraire...) ? Quelle est la couleur d'un champ scalaire ?

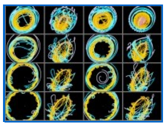
-  Ne pas négliger les illusions d'optique !

Des réponses arbitraires, partielles, voire fausses, qui peuvent **dissimuler ce qui est** et **révéler ce qui n'est pas**...

- **La Programmation** : entre Art et Bricolage, bien loin de la rigueur des démonstrations (voir quelques exemples à suivre)...
- **L'impossibilité de manipuler les nombres réels dans un ordinateur** :
  - Un exemple merveilleux, simple et naïf (le même exemple sans itérations).
  - Quelques conséquences et d'autres encore.
  - La réversibilité du temps propre à de très nombreuses équations de la Physique peut être perdue lors de leur traitement numérique.
  - Pourquoi les nombres réels sont-ils indispensables à la physique ? Uniquement pour obtenir des équations différentielles ? Mais alors, quel sens cela a-t-il de faire tendre vers zéro une grandeur physique et par exemple une longueur pour laquelle l'échelle de Planck est infranchissable ?
  - XXIe siècle : du **continu non différentiable** au **non continu non différentiable** ?
- **Les Chaos Virtuels** :
  - numérique :



  - subjectif :



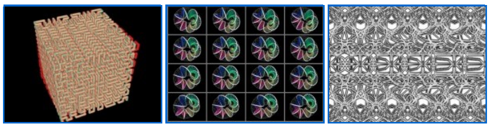
- **La Grande Bibliothèque d'Alexandrie revisitée** :
  - Notre patrimoine se numérise irréversiblement.
  - De la pérennité (par duplication et dispersion) à l'ubiquité et à la vulnérabilité.

3-ARTS ET MATHEMATIQUES, MATHEMATIQUES ET ARTS :

- De la connaissance objective à la connaissance subjective,
- Découverte scientifique et Création artistique : Une même démarche...
- **Les Mathématiques au service des Arts** :
  - La perspective :

  - La couleur :

- Le relief :



- L'analyse et l'authentification des œuvres d'art (l'exemple de Jackson Pollock et de la dimension fractale).

- De nouveaux outils de création.

- Imiter, copier, s'inspirer, extrapoler,...

- De nouvelles natures mortes :

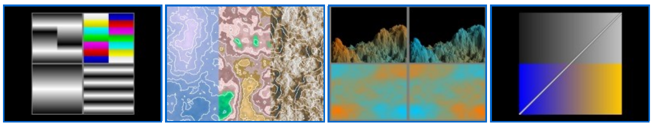
- La musique.

- Le septième art.

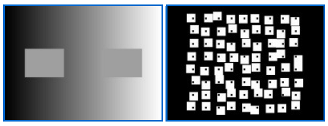
- Etc...

* **Les Arts au service des Mathématiques** :
  - L'harmonie des proportions (le nombre d'or,...) :

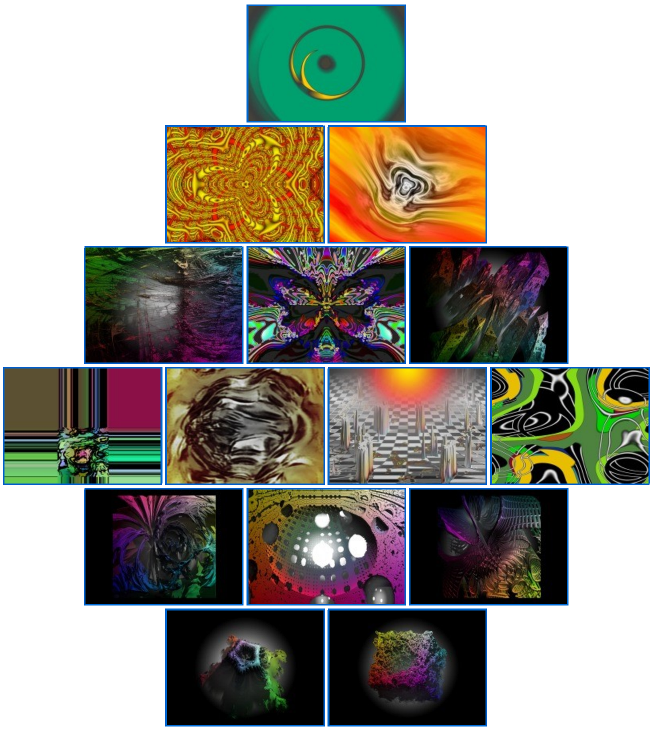
- Le choix des couleurs ("du froid au chaud") et des modes de représentation :

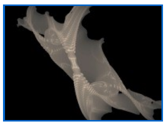


- Les illusions d'optique :



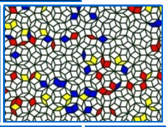
* La notion d'**œuvre potentielle** : l'œuvre c'est le modèle mathématique (et/ou informatique) !

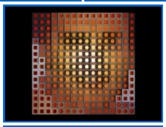


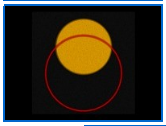


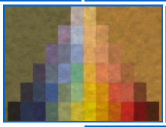
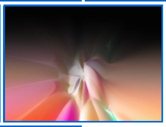
- ***A la manière de...***










4-CONCLUSION :

- Les Mathématiques possèdent un rôle structurant fondamental.

- Les Mathématiques sont notre meilleur (et unique ?) "outil" pour approcher (asymptotiquement ou "fractalement" ?) la Réalité et peut-être sont-elles cette Réalité...

- La Recherche en Mathématiques (et en Physique,...) : l'ultime aventure moderne ?

- **Les Mathématiques (et la Physique) sauveront-elles l'Humanité** ?
  - Emploi et innovation (l'exemple du GPS : "union" de la Mécanique Quantique, de la Relativité Restreinte et de la Relativité Générale).
  - Les pandémies, la pollution, les changements climatiques, l'effet de serre, l'exploitation des gaz de schiste, la séquestration du dioxyde de carbone,... : il faut modéliser !
  - L'épuisement des énergies non renouvelables (de la bougie à l'éclairage électrique, des centrales thermiques aux centrales nucléaires,...).
  - Préserver la Nature et la biodiversité.
  - Nourrir et abreuver les êtres vivants, traiter les eaux usées,...
  - **Sans Recherche** (appliquée et fondamentale), **pas de Découvertes !**