

# Optimisation par les méthodes d'homogénéisation et SIMP

March 7, 2012

L'objet de cette séance de TP est d'implémenter et de tester deux méthodes d'optimisation topologiques: homogénéisation et SIMP. Si ces méthodes peuvent s'appliquer à la résolution de problèmes d'optimisation variés, nous nous contenterons ici de considérer le problème de minimisation de la compliance d'une structure mécanique, dont le comportement sera supposé linéaire et élastique. Si nous avons essayé d'effectuer ici une présentation auto-contenue de ces méthodes, nous renvoyons au cours écrit pour plus de détails.

## 1 Position du problème

On considère l'optimisation d'une structure élastique  $\Omega$  soumise à des forces surfaciques  $g$  sur une partie  $\Gamma_N$  de sa frontière, encastrée sur une partie  $\Gamma_D$  et libre sur  $\Gamma_F = \partial\Omega \setminus (\Gamma_N \cup \Gamma_D)$ . On suppose que  $\Omega$  est constitué d'un solide élastique linéaire isotrope caractérisé par ses modules de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Le déplacement de la structure

$$u \in X := \{v \in H^1(\Omega)^N \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

est tel que pour tout  $v \in X$ ,

$$\int_{\Omega} Ae(u) : e(v) dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds,$$

où  $e(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$  est le tenseur métrique linéarisé et  $A$  est la loi de Hooke du matériau définie par

$$A\xi : \xi = 2\mu|\xi|^2 + \lambda\text{Tr}(\xi)^2.$$

On souhaite résoudre le problème de minimisation

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega), \tag{1}$$

où  $J$  est la compliance de la structure supplémenté d'un coût proportionnel à son volume ( $\ell \in \mathbb{R}^+$ )

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} Ae(u) : e(u) dx + \ell|\Omega|$$

et  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des ouverts inclus dans un espace de travail noté  $D$ . On rappelle que la forme particulière de la fonction coût considérée permet de reformuler le problème de minimisation de la compliance sous la forme d'un double problème de minimisation

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{A}} \inf_{\substack{\tau \in H(\text{div}) \\ \nabla \cdot \tau = 0 \\ \tau \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \tau \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_F}} \int_{\Omega} A^{-1} \tau : \tau \, dx + \ell |\Omega|.$$

## 2 Optimisation par la méthode d'homogénéisation

Le problème (1) est en général mal posé: il n'admet pas de solution dans l'espace  $\mathcal{A}$ . Afin de pallier ce problème on étend l'espace de recherche à l'espace des matériaux composites. L'optimisation s'effectue alors par rapport au couple  $(A^*, \theta)$  qui à tout point de l'espace de travail  $D$  associe une densité de matière  $\theta$  et une loi de Hooke  $A^*$  appartenant à l'espace  $G_\theta$  des composites de densité  $\theta$ . Le problème de minimisation de la compliance prend la forme suivante

$$\inf_{(\theta, A^*)} \inf_{\substack{\tau \in H(\text{div}) \\ \nabla \cdot \tau = 0 \\ \tau \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \tau \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_F}} \int_D A^{-*} \tau : \tau + \ell \theta \, dx. \quad (2)$$

On peut alors intervertir les deux étapes de minimisation (minimiser par rapport à  $(A^*, \theta)$  puis par rapport à  $\tau$ . Il s'avère que le minimum

$$\inf_{(\theta, A^*)} \int_D A^{-*} \tau : \tau + \ell \theta \, dx$$

est atteint par la sous-classe de l'ensemble des matériaux composites que sont les laminés de rang 2. La loi de Hooke est alors complètement caractérisée par les proportions de lamination  $m_1$  et  $m_2$ , par la densité  $\theta$  et par l'orientation des directions de lamination (qui sont orthogonales), c'est à dire par un vecteur  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  de norme 1 (qui désigne l'orientation de la première direction de lamination). Plus précisément, on a

$$A^{-*} \tau : \tau = \bar{A}^{-*} \bar{\tau} : \bar{\tau},$$

où

$$\bar{\tau} = (\tau_{11}, \sqrt{2}\tau_{12}; \tau_{22}),$$

$$\bar{A}^{-*} = \bar{A}^{-1} + \frac{1-\theta}{4\theta} \frac{2\mu + \lambda}{\mu(\mu + \lambda)} S_\beta^T \begin{pmatrix} m_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & m_1^{-1} \end{pmatrix} S_\beta,$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda & 0 & 2\mu\lambda \end{pmatrix} \quad (3)$$

et

$$S_\beta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \beta_1 & \sqrt{2}\beta_2 & 1 - \beta_1 \\ -\sqrt{2}\beta_2 & 2\beta_1 & \sqrt{2}\beta_2 \\ 1 - \beta_1 & -\sqrt{2}\beta_2 & 1 + \beta_1 \end{pmatrix}$$

ou  $\beta = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2)$ . En théorie, la matrice  $A^*$  est singulière ( $\varepsilon = 0$ ), mais d'un point de vu numérique, il est nécessaire de choisir une valeur de  $\varepsilon$  petite mais non nulle.

## 2.1 Algorithme d'optimisation pour l'homogénéisation

Afin de résoudre le problème (2), on procède par une méthode de minimisation alternée par rapport aux variables d'optimisation.

### Minimisation par rapport à $\tau$

La minimisation par rapport au tenseur de contraintes  $\tau$  s'effectue par la résolution du problème variationnel consistant à déterminer

$$u \in V := \{v \in H^1(D)^N \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

tel que pour tout  $v \in V$ ,

$$\int_D A^* e(u) : e(v) dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot v ds$$

et on a  $\tau = A^* e(u)$ .

### Minimisation par rapport à l'orientation de la cellule

Dans le cas limite  $\varepsilon = 0$ , il est nécessaire pour que  $\bar{A}^* \tau \cdot \bar{\tau}$  soit fini de choisir  $\beta$  de sorte que  $(0, 1, 0)S_\beta \bar{\tau} = 0$ , c'est à dire

$$\beta = (\tau_{11} - \tau_{22}, 2\tau_{12})^T / ((\tau_{11} - \tau_{22})^2 + 4\tau_{12}^2)^{1/2}.$$

### Minimisation par rapport aux proportions de lamination

Un calcul assez simple (non détaillé ici) nous permet de déterminer les proportions de lamination optimales, données par

$$m_1 = \frac{|\tau_{11} + \tau_{22} - \sqrt{\delta}|}{|\tau_{11} + \tau_{22} - \sqrt{\delta}| + |\tau_{11} + \tau_{22} + \sqrt{\delta}|}, \quad m_2 = \frac{|\tau_{11} + \tau_{22} + \sqrt{\delta}|}{|\tau_{11} + \tau_{22} - \sqrt{\delta}| + |\tau_{11} + \tau_{22} + \sqrt{\delta}|}.$$

### Minimisation par rapport $\theta$

De même, le minimum par rapport à  $\theta$  peut-être calculé explicitement et on a

$$\theta = \min \left( 1, \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( \frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\mu + \lambda)} \right)^{1/2} \left( \left| \frac{\tau_{11} + \tau_{22} + \sqrt{\delta}}{2} \right| + \left| \frac{\tau_{11} + \tau_{22} - \sqrt{\delta}}{2} \right| \right) \right). \quad (4)$$

## 2.2 Pénalisation

La solution de l'algorithme précédent s'avère être (sauf cas particulier) un composite, alors que d'un point de vu pratique, on cherche plutôt à obtenir une "vraie" forme. A cet effet, on poursuit le processus d'optimisation alterné précédent en pénalisant les valeurs intermédiaires de la densité. En l'occurrence, on met à jour  $\theta$  à l'aide de la formule

$$\theta = (1 - \cos(\pi\theta_{opt}))/2,$$

où  $\theta_{opt}$  est donné par (4).

## 3 Optimisation par la méthode SIMP

La méthode SIMP consiste à convexifier la fonction coût initiale en élargissant l'espace de recherche à des matériaux fictifs de "densité"  $\theta$  et de loi de Hooke  $\theta A$ . Cette méthode est beaucoup aisée à implémenter que la méthode d'optimisation par homogénéisation mais donne en général des résultats un peu moins optimaux. Suite à l'introduction de ces matériaux fictifs, le problème à résoudre consiste à minimiser

$$\inf_{(\theta, A^*)} \inf_{\substack{\tau \in H(\text{div}) \\ \nabla \cdot \tau = 0 \\ \tau \cdot n = g \text{ sur } \Gamma_N \\ \tau \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_F}} \int_D \theta^{-1} A^{-1} \tau : \tau + \ell \theta \, dx. \quad (5)$$

### 3.1 Algorithme d'optimisation pour SIMP

Afin de résoudre le problème (5), on procède également par une méthode de minimisation alternée par rapport aux variables d'optimisation.

#### Minimisation par rapport à $\tau$

La minimisation par rapport au tenseur de contraintes  $\tau$  s'effectue par la résolution du problème variationnel consistant à déterminer

$$u \in V := \{v \in H^1(D)^N \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$$

tel que pour tout  $v \in V$ ,

$$\int_D \theta A e(u) : e(v) \, dx = \int_{\Gamma_N} g \cdot v \, ds$$

et on a  $\tau = \theta A e(u)$ .

#### Minimisation par rapport à la densité $\theta$

L'infimum par rapport à la densité  $\theta$  est obtenue pour

$$\theta = \min(1, \ell / (A^{-1} \tau : \tau)). \quad (6)$$

L'étape de pénalisation s'effectue en utilisant la même méthode que celle introduite pour la méthode d'homogénéisation, c'est à dire

$$\theta = (1 - \cos(\pi\theta_{opt}))/2,$$

où  $\theta_{opt}$  est donné par (6).

## 4 Application pratique

Le but de ce TP est de comparer l'efficacité des deux méthodes présentées et d'étudier l'influence des différents paramètres dont elles dépendent. Un script complet (sous **FreeFem++**) pour la méthode d'homogénéisation est fourni. Ce dernier pourra servir comme base de travail pour implémenter la méthode SIMP.

### 4.1 Optimisation par la méthode d'homogénéisation

#### 1. Test du script

Télécharger l'archive `TP-homogenization.tgz` sur la page web

[www.cmap.polytechnique.fr/~pantz](http://www.cmap.polytechnique.fr/~pantz)

(TP Conception Optimale). Décompresser l'archive. Le script se trouve dans le répertoire `TP-homogenization/homogenization`. Il est décomposé en plusieurs parties: Le script principal `Homogenization.edp` qui fait appel aux sous-scripts

- `cantilever.parameters.edp` – Paramètres de la méthode (valeurs initiales des paramètres, forces appliquées, pénalisation par rapport au volume, nombre d'itérations, densité minimale, adaptation de maillage éventuelle)
- `cantilever.mesh.edp` – Permet de définir la géométrie du problème (forme du domaine, zones d'application des forces et d'encastrement)
- `macros.edp` – Un jeu de macros utilisées dans le script de sorte à en simplifier l'écriture
- `computeAstar.edp` – Permet de calculer la loi de Hooke associée à un composite (c'est la partie "pénible")

Exécuter simplement la commande

```
FreeFem++ Homogenization.edp
```

dans une fenêtre de commande (on commence doucement).

#### 2. Dépendance en fonction du maillage

Il est possible d'adapter le maillage afin d'affiner les calculs. A cet effet, modifier le fichier `cantilever.parameters.edp` qui contient les paramètres régissant le processus d'adaptation du maillage (qui n'a lieu que pendant la première phase non pénalisée)

- **FrequenceAdapt** Fréquence de l'adaptation du maillage.
- **thetaRegValue** L'adaptation du maillage s'effectue en fonction de la densité  $\theta$  (qui est constante sur chaque triangle). On régularise cette densité avant de procéder à l'adaptation du maillage.
- **err** Plus ce paramètre est petit, plus le maillage est fin.
- **hmin** Taille minimale du maillage (permet de ne pas générer de maillages TROP fins).
- **hmaxPen** On peut effectuer une étape d'adaptation juste avant de procéder à la phase de pénalisation. La taille des mailles sera alors inférieure à cette valeur.
- **splitPen** Chaque triangle est scindé en un nombre de sous-triangles croissant en fonction de cette valeur.

Le résultat de la solution non homogénéisée dépend elle fortement du maillage utilisé ? Quand est-il de la solution pénalisée ?

### 3. Modification des espaces de discrétisation

Le script peut-être utilisé avec divers espaces de discrétisation pour le déplacement, la densité ou les proportions de lamination. Les valeurs possibles sont:

- P2 ou P1 pour le déplacement  $u$  de la structure.
- P0, P1 ou P1 discontinu pour la densité  $\theta$ .
- P0, P1 ou P1 discontinu pour les proportions de lamination.

Étudier l'influence du choix des espaces de discrétisation sur le processus d'optimisation (en particulier, que ce passe t il si on choisit des éléments finis P1 pour calculer le déplacement de la structure ?). Note: ces espaces sont définis dans le script principal `Homogenization.edp`.

### 4. Modification de la géométrie

Modifier la géométrie du domaine définie dans le fichier `cantilever.mesh.edp`. Qu'observe-t-on dans le cas du cantilever court (i.e.  $D = ]0, L[ \times ]0, L/2[$ ) ? On pourra également considérer le cas d'un pont dont la géométrie est décrite par le domaine  $D$  de la figure 1. Le pont est encastré sur les parties inférieures latérales marquées en traits épais et on applique une force verticale sur la partie centrale (note: on pourra choisir d'autres géométries du même type).

### 5 (Facultatif) Volume cible

Modifier l'étape de calcul de la densité optimale  $\theta$  afin d'effectuer une optimisation à volume de matière totale fixe. Dans ce cas, la pénalisation de la densité  $\ell$  n'est pas fixe mais est déterminée par un procédé dichotomique: On utilise la formule (4) pour déterminer la densité optimale, puis on augmente ou on diminue  $\ell$  jusqu'à obtenir le volume  $\int_D \theta dx$  souhaité.

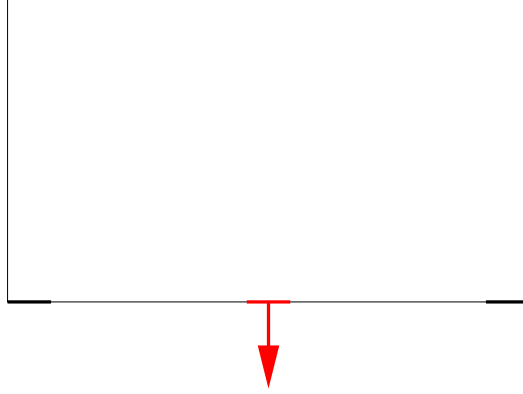


Figure 1: Géométrie du domaine pour l'optimisation d'un pont

## 4.2 Optimisation par la méthode SIMP

En s'inspirant du code donné pour l'optimisation par homogénéisation, implémenter la méthode SIMP sous **FreeFem++** (on pourra dans un premier temps s'affranchir de la partie portant sur l'adaptation de maillage). On rappelle qu'il suffit d'implémenter les deux étapes de minimisation par rapport à  $\tau$  et  $\theta$ . En ce qui concerne la première étape, on rappelle que

$$\theta A e(u) : e(v) = \theta \overline{A e(u)} \cdot \overline{e(v)},$$

où  $\overline{A}$  est donné par (3) et

$$\overline{e(u)} = (\partial u_1 / \partial x, (\partial u_2 / \partial x + \partial u_1 / \partial y) / \sqrt{2}, \partial u_2 / \partial y).$$

Pour l'étape d'optimisation par rapport à  $\theta$  on rappelle que

$$A^{-1} \tau : \tau = \theta^2 (\overline{A e(u)} \cdot \overline{e(u)}).$$