TP FreeFem++ MAP431
Solide dans fluide visceux

Nous souhaitons déterminer le mouvement d'un solide rigide plongé dans un fluide visceux. A cet effet, on propose de résoudre les équations décrivant le systèle à l'aide du logiciel libre d'éléments finis `FreeFem++`[1].

1 Modélisation

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On considère un solide rigide de forme ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ de densité ρ_0 dont le centre de gravité est situé en l'origine. Sa position est déterminer par un mouvement rigide, combinaison d'une rotation d'angle $\theta(t)$ $R_{\theta(t)}$ et d'une translation $c(t)$. On note $\varphi(t) : \omega \to \Omega$ la déformation du solide au temps t définie par

$$\varphi(t, x) = R_{\theta(t)}x + c(t).$$

Par ailleurs, on note $\omega(t) = \varphi(t, \omega)$ le domaine occupé par le fluide au temps t et $\chi(t)$ la fonction caractéristique de $\omega(t)$. On suppose que $\Omega \setminus \omega(t)$ est occupé par un fluide Newtonien visqueux homogène isotrope et incompressible de viscosité μ et de densité ρ. On note $u(t) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ la vitesse du fluide (ou du solide) au temps t. Enfin, on désigne par $u_D(t)$ la vitesse préscrite sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. Enfin, on néglige l'inertie du fluide et du solide.

La vitesse du fluide est solution du problème variationnel suivant: $(u, p) \in W(t) \times L^2(\Omega)$ tel que pour tout $(v, q) \in W_0(t) \times L^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega 2\mu e(u) : e(v) + (\nabla \cdot u)q + (\nabla \cdot v)p \, dx = \int_\Omega \rho(t) g \dot{v} \, dx,$$

où g est le champ gravitaionnel, $\rho(t) = \rho_0\chi(t) + \rho(1 - \chi(t)$ et

$$W(t) = \{v \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } e(v) = 0 \text{ p.p. sur } \omega(t) \text{ et } v = u_D \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$$W_0(t) = \{v \in H^1(\Omega)^2 \text{ tel que } e(v) = 0 \text{ p.p. sur } \omega(t) \text{ et } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Vitesse du solide La vitesse su solide est donneée par $\dot{\varphi}(t) = \dot{R}(t)x + \dot{c}(t) = u(t) \circ \varphi(t)$. Soit

$$\dot{R}_\theta x + \dot{s} = u \circ \varphi.$$

Par intégration sur ω, il vient

$$\dot{s} = |\omega|^{-1} \int_{\omega(t)} u \, dx. \tag{1}$$

En dérivant

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

[1] www.freefem.pdf

Par dérivation, on a

$$\dot{R}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \dot{\theta} = R_{\pi/2+\theta}\dot{\theta}.$$

On a donc

$$\dot{\theta} R_{\pi/2+\theta} x + \dot{s} = u(t, R_\theta x + s)$$

et

$$\dot{\theta} R_{\pi/2+\theta} x \cdot R_{\pi/2+\theta} x + \dot{s} \cdot R_{\pi/2} x = u(t, R_\theta x + s) \cdot R_{\pi/2+\theta} x,$$

soit encore

$$\dot{\theta}|x|^2 + \dot{s}(t) \cdot R_{\pi/2} x = u(t, R(t)x + s(t)) \cdot R_{\pi/2+\theta} x,$$

En intégrant sur ω, il vient

$$\dot{\theta} \int_\omega |x|^2 \, dx = \int_{\omega(t)} u \cdot R_{\pi/2}(y - s) \, dy.$$

En posant $I = \int_\omega |x|^2 \, dx$ on a donc

$$\dot{\theta} = I^{-1} \int_{\omega(t)} (y - s) \wedge u \, dy. \tag{2}$$

2 Discrétisation

On note V_h un sous espace de dimension fini de $H^1(\Omega)^2$ et Q_h un sous espace de $L^2(\Omega)$. On se propose d'utiliser une méthode de Galerkin afin de calculer pour tout $t_n = n\Delta t$ une approximation u_n, p_n de la vitesse et de la pression. A cet effet, on résout à chaque itération en temps n la solution u_n de l'approximation variationnelle $(u_n, p_n) \in V_h \times Q_h$ tel que $u_n = u_D(t)$ sur $\partial\Omega$ et tel que pour tout $(v_n, q_n) \in V_h$ avec $v_n = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \mu e(u_n) : e(v_n) + \delta^{-1} \chi_n e(u_n) : e(v_n) + (\nabla \cdot v_n) p_n + (\nabla \cdot u_n) q_n \, dx = \int_\Omega \rho g \cdot v_n \, dx,$$

où δ est un petit réel positif pénalisant la contrainte $e(u) = 0$ sur $\omega(t)$.
On utilise un schéma d'ordre un pour discrétiser les équation (1) et (2). En notant θ_n et s_n les approximations de la rotation et translation du solide. On pose

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{\Delta t} = |\omega|^{-1} \int_{\omega_n} u \, dx. \tag{3}$$

et

$$\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{\Delta t} = I^{-1} \int_{\omega_n} (y - s_n) \wedge u_n \, dy.$$

Application On utilisera une discrétisation P1-bulle pour la vitess et P1 pour la pression ou P2 pour la vitesse et P1 pour la pression. On choisira un domaine Ω rectangluaire de demi longueur $L = 2$ et de demi hauteur $H = 2$, un solide elliptique de rayon principaux r et γr, avec $r = 1$ et $\gamma = 1/2$. Enfin, on prendra $\rho = 1$, $\rho_0 = 1/2$, $\mu = 1$, $g = (0, -1)$, $\Delta t = 1$, $T = 200$. On construira des maillages comptant une dizaine de mailles par unité de longueur.

3 et dans l'eau ?

On a considéré jusqu'ici un fluide très visqueux, ce qui nous à permis jusqu'ici de ne pas prendre en compte l'intertie du fluide ou du solide.

Dans les cas où cette intertie est prise en compte, la vitesse est solution du problème variationnel

$$\int_\Omega \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla u) u \right) \cdot v \rho \dot{u} \cdot v + \rho (u \cdot \nabla u) \cdot v + 2\mu e(u) : e(v) + (\nabla \cdot u) q + (\nabla \cdot v) p \, dx = \int_\Omega \rho g \dot{v} \, dx,$$

C'est typiquement la même formuation variationnelle que précédement, à la différence près qu'on a ajouté le terme d'intertie supplémentaire. On pourra reprendre le code précédent en ajoutant ce terme d'intertie. Ce correspond à l'accélération d'une particule se déplaçant à la vitesse u. On note $X(t)$ la carcatéristique d'une particule située en x à $t = 0$,

$$X(0, x) = x$$

et

$$\dot{X}(t, x) = u(t, X(x, t)).$$

On a alors

$$\ddot{X}(t, x) = (\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla u) u)(t, X(t, x)).$$

La méthode des caractéristiques consiste à discrétiser ce terme par

$$\ddot{X}(t, x) \simeq \frac{\dot{X}(t, x) - \dot{X}(t - \Delta t, x)}{\Delta t} = \frac{u(t, X(t, x)) - u(t, X(t - \Delta t, x)}{\Delta t},$$

c

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla u) u)(t, x) \simeq \frac{u(t, x) - u(t, X(t - \Delta t, X(t)^{-1} x))}{\Delta t}.$$

On obtient donc ainsi la formulation variationnelle suivante, discrétisée en temps

$$\int_\Omega \rho \frac{u_n - \widetilde{u}_{n-1}}{\Delta t} \cdot v \rho \dot{u} \cdot v + \rho (u \cdot \nabla u) \cdot v + 2\mu e(u) : e(v) + (\nabla \cdot u) q + (\nabla \cdot v) p \, dx = \int_\Omega \rho g \dot{v} \, dx,$$

où $\widetilde{u}_{n-1}$ est une approximation de $u(t, X(t - \Delta t, X(t)^{-1} x))$ en calculant la caractéristique d'une particule située en x remontant le long du champ θ pendant un temps Δt.