Ecole polytechnique, 3ème année, MAP-MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 20 Mars 2013 (2 heures)

1. Transport et diffusion : 10 points

Soient $L, \lambda, \sigma > 0$. On note $\mathfrak{H}_0 := L^2([0,L] \times [-1,1])$ et $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de l'espace de Hilbert réel $\mathfrak{H}_0$. Pour toute fonction $\phi \in \mathfrak{H}_0$, on note

$$\langle\phi\rangle(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \phi(x,\mu)d\mu\,, \quad \text{et } \mathcal{R}\phi(x,\mu) := \phi(x,-\mu)\,.$$

1) Soit A, l'application linéaire définie sur $\mathfrak{H}_0$ par la formule

$$A\phi := \lambda\phi + \sigma(\phi - \langle\phi\rangle)\,.$$

a) Montrer que A est bijective et calculer A^{-1}.
b) Montrer que les applications linéaires A et A^{-1} sont continues sur $\mathfrak{H}_0$ et calculer leurs normes en fonction de λ et σ.
c) Montrer qu'il existe des constantes positives α^+ et α^- que l'on calculera en fonction de λ et σ telles que

$$(A\phi|\phi) \geq \alpha^+(\phi|\phi) \quad \text{et } (A^{-1}\phi|\phi) \geq \alpha^-(\phi|\phi) \quad \text{pour tout } \phi \in \mathfrak{H}_0\,.$$

Pour tout $S \in \mathfrak{H}_0$, on considère le problème aux limites pour l'équation de Boltzmann linéaire stationnaire avec condition aux limites de réflexion spéculaire

$$(BLS) \qquad \begin{cases} \mu\partial_x f(x,\mu) + Af(x,\mu) = S(x,\mu)\,, & 0 < x < L\,,\ |\mu| \leq 1\,, \\ (I-\mathcal{R})f\big|_{x=0} = (I-\mathcal{R})f\big|_{x=L} = 0\,, & 0 < \mu \leq 1\,, \end{cases}$$

On note

$$\mathfrak{H} := \{f \in \mathfrak{H}_0 \,|\, \mu\partial_x f \in \mathfrak{H}_0\text{Ê et } (I-\mathcal{R})f\big|_{x=0} = (I-\mathcal{R})f\big|_{x=L} = 0\}$$

et on admet que $\mathfrak{H}$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$[f|g] := (f|g) + (\mu\partial_x f|\mu\partial_x g)\,.$$

Pour tout $f, g \in \mathfrak{H}$, on pose

$$a(f,g) := (\mu\partial_x g|A^{-1}(\mu\partial_x f)) + (Af|g)\,, \quad \ell_S(g) := (A^{-1}S|\mu\partial_x g) + (S|g)$$

2) Montrer que la forme bilinéaire a définit un produit scalaire sur $\mathfrak{H}$ et qu'il existe $C > c > 0$ telles que

$$|a(f,g)| \leq C\sqrt{[f|f][g|g]} \text{ et } a(f,f) \geq c[f|f] \text{ pour tout } f \in \mathfrak{H}\,.$$

On appelle solution faible du problème (BLS) une fonction $f \in \mathfrak{H}$ t.q.

$$a(f,\phi) = \ell_S(\phi) \quad \text{pour tout } \phi \in \mathfrak{H}\,.$$

3) Montrer que, pour tout $S \in \mathfrak{H}_0$, le problème (BLS) admet une unique solution faible. (On pourra appliquer le théorème de Lax-Milgram, ou encore le théorème de représentation de Riesz dans l'espace $\mathfrak{H}$ muni d'un produit scalaire bien choisi.)
4) Notons $X_L := \{f \in \mathfrak{H}_0 \cap C([0,L] \times [-1,1]) \mid \partial_x f \in C([0,L] \times [-1,1])\}$. Montrer que si $f \in X_L$ est solution de (BLS) au sens usuel, alors $a(f,\phi) = \ell_S(\phi)$ pour tout $\phi \in X_L$.
5) On considère le problème (BLS) avec $\sigma > 0$ mais $\lambda = 0$ et $S = 0$. Montrer que les seules solutions de ce problème dans l'espace X_L sont les fonctions constantes sur $[0,L] \times [-1,1]$.

6) Quelle est la plus grande valeur propre (réelle) de l'opérateur de Boltzmann linéaire B défini sur l'espace X_L par $Bf = -\mu\partial_x f - \sigma(f - \overline{f})$?
7) Y a-t-il une notion de taille critique de l'intervalle $[0, L]$ pour l'opérateur B avec les conditions aux limites de réflexion spéculaire en 0 et L ?

2. Schéma numérique : 10 points

Soit une vitesse constante et positive $a > 0$. On considére l'équation d'advection linéaire dans $(0, 1)$ avec une condition aux limites de périodicité

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbf{R}_*^+ \\ u(t,0) = u(t,1) \text{ pour } t \in \mathbf{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1), \end{array}\right. \tag{1}$$

où $u_0(x)$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0,\ j \in \{0, 1, ..., N\}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t, x)$. On considère deux schémas de type Crank-Nicolson avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$. Tout d'abord un schéma décentré amont

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2}\left(\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}\right) = 0 \quad \text{pour } j \in \{1, ..., N\}, \tag{2}$$

puis un schéma centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) = 0 \quad \text{pour } j \in \{1, ..., N\}. \tag{3}$$

La condition aux limites de périodicité est prise en compte en posant $u_0^n = u_N^n$ et $u_1^n = u_{N+1}^n$. On note U^n le vecteur de composantes u_j^n, pour $1 \leq j \leq N$.

1) Montrer que les schémas (2) et (3) peuvent s'écrire

$$U^{n+1} - U^n + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}A(U^{n+1} + U^n) = 0, \tag{4}$$

avec une matrice A que l'on précisera pour chacun des schémas.
2) Montrer que si la matrice A est positive au sens des formes quadratiques, $AU \cdot U \geq 0$ pour tout $U \in \mathbf{R}^N$, alors le schéma (4) est inconditionellement stable en norme L^2.
3) Montrer que, pour les schémas (2) et (3), la matrice A est effectivement positive au sens des formes quadratiques.
4) Montrer que le schéma (2) est consistant et précis à l'ordre 1 en espace et 2 en temps, tandis que le schéma (3) est précis à l'ordre 2 en espace et temps. Que peut-on dire de la convergence de ces schémas ?
5) Dans le cas du schéma (2) montrer que la matrice $(I + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}A)$ est une M-matrice stricte, tandis que la matrice $(I - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}A)$ a toutes ses composantes positives ou nulles sous la condition CFL $\Delta t \leq 2\Delta x/a$. En déduire que le schéma (2) vérifie le principe du maximum discret sous cette condition CFL.