Théorie du calcul critique

Approche discrète

Exercice I.

1. On minimise sur
$$x \in V = (\mathbb{R}_+^*)^n \cap \{\sum x_i = 1\}.$$
Près des bords $f(x)$ devient infinie. Comme f est continue, f admet au moins un minimum.

2. Supposons qu'il existe deux indices i et j tels que
$$f(u) = \frac{(Au)_j}{u_j} > \frac{(Au)_i}{u_i}.$$
Alors on augmente (légèrement) u_j et on diminue (légèrement) u_i sans modifier les autres u_k, tout en préservant $\sum_r u_r = 1$. De ce fait on fait baisser la valeur de f. C'est impossible donc $f(u) = \frac{(Au)_j}{u_j}$ pour tout j. Donc u est un vecteur propre associé à $\lambda = \min_{x\in(\mathbb{R}_+^*)^n} f(x)$.

3. On a $D^{-1}AD = \left(\frac{A_{ij}u_j}{u_i}\right)$. Donc par calcul direct $||D^{-1}AD||_\infty = \lambda$. Or
$$\rho(A) = \rho(D^{-1}AD) \leq ||D^{-1}AD||_\infty = \lambda \leq \rho(A).$$
Donc $\lambda = \rho(A)$, ce qui montre le résultat.

4. Le cours énonce de plus que la valeur propre est simple, à condition de la matrice soit irréductible.

Exercice II.

1. Evident.

2. La première équation s'écrit aussi
$$\phi_1 = G_1\left(\frac{1}{\lambda}\nu\left(\sigma_{f1}\phi_1 + \sigma_{f2}\phi_2\right),\right)$$
et pour la deuxième
$$\phi_2 = G_2\left(\sigma_r\phi_1\right).$$
D'où
$$\phi_1 = G_1\left(\frac{1}{\lambda}\nu\left(\sigma_{f1}\phi_1 + \sigma_{f2}G_2\left(\sigma_r\phi_1\right)\right)\right).$$
Des manipulations identiques aboutissent à la deuxième formulation.

3. La discrétisation par Différences Finies des opérateurs situés à gauche des signes "=" aboutit à des M-matrices
$$M_{ij} \leq 0,\ j \neq i, \quad \sum_j M_{ij} > 0.$$
L'inverse $N = M^{-1}$ est une matrice à coefficients $N_{ij} > 0$. L'application du théorème de Perron est immédiate.

Exercice III.

1. Evident.

2. On a
$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad \forall i.$$
Donc
$$Pe = e \text{ avec } e^t = (1, 1, \cdots, 1) \Longrightarrow 1 \leq \rho(P).$$
Or
$$\rho(P) \leq ||P||_\infty = \max_i \left(\sum_j p_{ij}\right) = 1.$$
Donc $\rho(P) = 1$.

Exercice IV.

1. Cours. Le paramètre $\varepsilon > 0$ permet de garantir que $(M+\varepsilon)^{-1}$ a tous ses coefficients > 0.

2. La matrice M est symétrique. Sa plus petite valeur propre est $\lambda_1 = 0$ associée au vecteur propre $e = (1, \cdots, 1)^t$. Soit $\lambda_2 \geq \lambda_1$ la deuxième valeur propre. Si $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ alors

$$Mx^2 = 0 \Longrightarrow 0 = (x^2, Mx^2) = \sum_{(i,j)\in T} (x_i^2 - x_j^2)^2.$$

T est l'ensemble des paires (i,j) telles que $M_{ij} \neq 0$. Alors x^2 est proportionnel à $x^1 = e$, ce qui est impossible. On a donc bien $\lambda_2 > 0$.

Pour une matrice symétrique les vecteurs propres sont orthogonaux

$$(x^2, x^1) = (x^2, e) = 0 \quad \text{(CQFD)}.$$

3. En dimension 1 d'espace, on note que M est la matrice de discrétisation de l'équation

$$-\frac{d^2}{dx^2}u = f$$

avec conditions de Neumann aux bords. On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Les valeurs propres sont $Mx = \lambda x$. Donc

$$2x_i - x_{i+1} - x_{i-1} = \lambda x_i, \quad 1 < i < N.$$

Soient

$$r^{\pm} = \frac{-\lambda + 2 \pm \sqrt{(\lambda-2)^2 - 4}}{2}$$

les deux racines du polynome qui définit la récurrence à trois indices. Donc

$$x = a\left((r^+)^j\right)_{1\leq j\leq N} + b\left((r^-)^j\right)_{1\leq j\leq N}.$$

Or $x_0 = x_1$ et $x_N = x_{N+1}$ correspond aux conditions aux bords. D'où

$$\begin{cases} a + b = ar^+ + br^-, \\ a(r^+)^N + b(r^-)^N = a(r^+)^{N+1} + b(r^-)^{N+1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a(1-r^+) + b(1-r^-) = 0, \\ a(r^+)^N(1-r^+) + b(r^-)^N(1-r^-) = 0 \end{cases}.$$

Donc

$$(1-r^+)(1-r^-)\left((r^-)^N - (r^+)^N\right) = 0.$$

La solution générale est

$$\frac{r^-}{r^+} = e^{\mathbf{i}2\pi\frac{k}{N}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Or $r^-r^+ = 1$, donc $(r^-)^2 = e^{\mathbf{i}2\pi\frac{k}{N}}$, i.e. $r^- = e^{\mathbf{i}\pi\frac{k}{N}}$ et $r^+ = e^{-\mathbf{i}\pi\frac{k}{N}}$. Finalement

$$\lambda_k = 2 - r^- - r^+ = 4\sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right) \in [0,4].$$

Les vecteurs propres sont proportionnels à

$$(1-r^-)\left((r^+)^j\right)_{1\leq j\leq N} - (1-r^+)\left((r^-)^j\right)_{1\leq j\leq N}$$

$$= 2i\left[\sin\left(\pi\frac{kj}{N}\right) - \sin\left(\pi\frac{k(j-1)}{N}\right)\right],$$

d'où

$$x_k = \sin\left(\pi\frac{kj}{N}\right) - \sin\left(\pi\frac{k(j-1)}{N}\right)$$

$$= 2\cos\left(\pi\frac{k(j-\frac{1}{2})}{N}\right)\sin\left(\pi\frac{1}{2N}\right).$$

Il est clair que

$$x_1 = 2\sin\left(\pi\frac{1}{2N}\right)\cos\left(\pi\frac{(j-\frac{1}{2})}{N}\right)$$

sépare l'ensemble des points en deux composantes connexes.

Remarque: On peut vérifier une propriété similaire pour le polynome de Legendre P^1. Expliquer pourquoi.