Théorie du calcul critique
Approche discrète

Exercice I. Le théorème de Perron

Le théorème de Perron (1907) s'énonce : "Une matrice à coefficients strictement positifs admet un vecteur propre à coefficients strictement positifs, et la valeur propre associée est le rayon spectral". Ce qui suit est une partie de la preuve de Wielandt.

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit

$$f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \quad ,$$

1. Montrer que f admet un point de minimum u dans $(\mathbb{R}_+^*)^n$.
2. Montrer que u est vecteur propre de A.
3. On rappelle que pour toute matrice M

$$\rho(M) \leq ||M||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} |m_{ij}|$$

Montrer que le minimum de f est le rayon spectral $\rho(A)$ de A.

Indication: on considérera la matrice diagonale D de coefficients diagonaux $u_1, \ldots, u_n$, et on calculera $\|D^{-1}AD\|_\infty$.
4. En quoi le théorème du cours est-il plus puissant ?

Exercice II. Application au calcul critique en neutronique

Soit un modèle de réacteur à deux groupes de neutrons: les rapides (1, $v \approx 10^7$'cms^{-1}) et les lents (2, $v \approx 10^5$cms^{-1}). On sait que les lents fissionent préférentiellement. Le modèle s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (d_1 \nabla \phi_1) + \sigma_{a1}\phi_1 = \nu\left(\sigma_{f1}\phi_1 + \sigma_{f2}\phi_2\right), \\ -\nabla \cdot (d_2 \nabla \phi_2) + \sigma_{a2}\phi_2 = \sigma_r \phi_1. \end{array} \right.$$

On a les encadrements

$$\sigma_{a1} \geq \sigma_{f1} + \sigma_r, \quad \sigma_{a2} \geq \sigma_{f2}, \quad \sigma_{f2} > \sigma_{f1}.$$

Le nombre de neutrons créés lors d'une fission est $\nu > 1$.
1. Il est courant de considérer une succsession d'état "d'équilibre" sous la forme d'une suite

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot \left(d_1 \nabla \phi_1^{(p+1)}\right) + \sigma_{a1}\phi_1^{(p+1)} = \nu\left(\sigma_{f1}\phi_1^{(p)} + \sigma_{f2}\phi_2^{(p)}\right), \\ -\nabla \cdot \left(d_2 \nabla \phi_2^{(p+1)}\right) + \sigma_{a2}\phi_2^{(p+1)} = \sigma_r \phi_1^{(p+1)}. \end{array} \right.$$

On parle des neutrons de la génération $p, p+1, \ldots$ A partir d'un certain rang, on admet que

$$\phi_1^{(p+1)} \approx \lambda \phi_1^{(p)}, \quad \lambda > 0.$$

Justifier le problème aux valeurs propres

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (d_1 \nabla \phi_1) + \sigma_{a1}\phi_1 = \frac{1}{\lambda}\nu\left(\sigma_{f1}\phi_1 + \sigma_{f2}\phi_2\right), \\ -\nabla \cdot (d_2 \nabla \phi_2) + \sigma_{a2}\phi_2 = \sigma_r \phi_1. \end{array} \right.$$

Pour $\lambda = 1$ le système est critique ($\lambda > 1$ sur-critique, $\lambda < 1$ sous-critique).
2. On munit le domaine d'étude de conditions aux bord de Dirichlet ou de Neumann. Soient G_1 et G_2 les inverses formels des opérateurs à gauche des signes $=$. Montrer que

$$G_1\left(\nu\sigma_{f1} I + \nu\sigma_{f2} G_2 \sigma_r\right)\phi_1 = \lambda\phi_1.$$

On pose $s_f = \nu\left(\sigma_{f1}\phi_1 + \sigma_{f2}\phi_2\right)$ le nombre de neutrons qui fissionent par unité. Montrer que

$$\left(\nu\sigma_{f1} I + \nu\sigma_{f2} G_2 \sigma_r\right) G_1 s_f = \lambda s_f.$$

3. On utilise une discrétisation standard (différences finies sur grille régulière) pour les différents opérateurs en présence.

Montrer que les hypothèses du théorème de Perron sont vérifiées. En déduire l'existence d'une solution discrète au problème de valeur propre-vecteur propre précédent.

Exercice III. Application à l'analyse spectrale de graphes. Cet exemple est tiré de l'article *Spectral analysis of Internet topologies.*

1. La méthode du *page-ranking* peut se concevoir dans la version simplifiée suivante.

A une page correspond un indice, j par exemple. La matrice d'adjacence $A = (a_{ij})$ des n pages considérées est telle que

$$a_{ij} = 1 \text{ ssi la page } i \text{ pointe vers la page } j,$$

$a_{ij} = 0$ dans le cas contraire. On pose

$$d_{\mathrm{out}}(i) = \sum_j a_{ij}.$$

Soit $0 \le \alpha < 1$ une "probabilité" de transition. La matrice de toutes les transitions possibles est P

$$p_{ij} = \frac{\alpha}{d_{\mathrm{out}}(i)} + \frac{1-\alpha}{n} \text{ si } a_{ij} \neq 0,$$

$$p_{ij} = \frac{1-\alpha}{n} \text{ si } a_{ij} = 0.$$

Cette matrice représente une marche au hasard dans la graphe de A, avec une probabilité α d'aller vers une autre page choisie au hasard dans la liste. A priori α est proche de 1.

Montrer que les hypothèses du théorème de Perron s'appliquent.

2. Montrer que la valeur propre maximale est $\lambda = 1$ (cette matrice est dite stochastique).

Le vecteur propre à gauche donne le *page-rank.*

Exercice IV. Application à l'analyse spectrale de graphes. Cet exemple est aussi tiré de l'article *Spectral analysis of Internet topologies.*

1. Soit un graphe construit à partir d'un maillage. Ce maillage est de type éléments finis par exemple. On veut le partionner de façon équilibré (équilibrage de tâches pour les calculs parallèles).

Le maillage peut aussi représenter la toile Internet, et on désire analyser le trafic sur la toile.

On note

$$a_{ij} = 1 \text{ si un lien existe entre les noeuds } i \text{ et } j,$$

et $a_{ij} = 0$ sinon. Noter que la matrice $A = (a_{ij})$ est symétrique $A = A^t$.

Soit D la matrice diagonale dont le $i^{\text{ème}}$ coefficient est égal à la somme des coefficients de A sur la ligne i :

$$d_i = \sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}.$$

soit

$$M^\varepsilon = D - A + \varepsilon I = (M^\varepsilon)^t, \quad \varepsilon > 0.$$

Cette matrice est appelée Laplacien du graphe pour $\varepsilon = 0$, qui est le cas vraiment intéressant.

1. On prend $\varepsilon > 0$. Montrer que la plus petite valeur propre de M^ε peut se déterminer par l'application du théorème de Perron à $(M^\varepsilon)^{-1}$.

2. On prend $\varepsilon = 0$. Montrer que la plus petite valeur propre de M est nulle, $\lambda_1 = 0$. La suivante $\lambda_2 \ge 0$ est appelée *connectivité algébrique.*

Montrer que $\lambda_2 > 0$ dès qu'un chemin ($a_{ij} \neq 0$) permet de passer de tout indice i à tout indice j.

Le vecteur propre correspondant x^2 est le vecteur de Fiedler. Montrer que

$$\sum_j x_j^2 = 0.$$

La méthode standard consiste alors à séparer les indices en deux groupes

$$I^\pm = \{j,\ x_j^2 > 0\}.$$

3. Soit la matrice du Laplacien en 1D. Montrer que I^+ et I^- sont connexes.

Le partitionnement est alors réalisé dans le cas général. Une application successive de cette méthode prend le nom de : *méthode de bisection spectrale récursive.*