Équation des caractéristiques, condition au bord

Dans tout ce qui suit, il est nécessaire de faire des dessins dans le plan (x,t) pour visualiser les caractéristiques.

Exercice I. Faisons nos gammes

Soit l'équation du transport

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + v\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \sigma(t,x) f(t,x) = S(t,x),$$

pour $t > 0,\ x \in \mathbb{R}$. On notera $f_0(x,v)$ la donnée initiale.

1. On prend $\sigma = 0$ est une constante. Montrer que

$$f(t,x) = f_0(x - tv, v) + \int_0^t S(s, x - v(t-s)) ds.$$

2. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall t > 0,\ \forall v \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq R \Rightarrow f_0(x,v) = S(t,x) = 0.$$

Démontrer que pour tout $t > 0$ et pour tout v, f est à support compact en x.

3. A présent $\sigma \neq 0$ constant. Montrer que

$$f(t,x) = e^{-\sigma t} f_0(x - tv, v) + \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} S(s, x - v(t-s)) ds.$$

Exercice II. Cas σ non constant

Soit l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + v\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \sigma(t,x) f(t,x) = S(t,x),$$

pour $t > 0,\ x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$f(t,x;v) = e^{-A(t,x;v,t)} f_0(x - tv, v) + \int_0^t e^{-A(t,x;v,s)} S(t-s, x - vs) ds$$

avec une fonction A à déterminer.

Exercice III. Cas "stationnaire"

Soit l'équation précédente pour $x \in \mathbb{R}$ et σ constant. On cherche une solution "stationnaire"

$$\widehat{f}(x,t,v) = e^{\lambda t} f(x,v).$$

1. Montrer que S doit être de la forme $S(t,x) = s(x)e^{\lambda t}$.

2. Quelle est l'équation satisfaite par f ? Montrer, en supposant f bornée, que

$$f(x,v) = \frac{1}{v}\int_{-\infty}^{x} e^{-(\sigma+\lambda)\frac{x-y}{v}} s(y) dy$$

ainsi que

$$f(x,v) = -\frac{1}{v}\int_{x}^{\infty} e^{(\sigma+\lambda)\frac{y-x}{v}} s(y) dy$$

suivant le signe de $(\sigma+\lambda)/v$ (on suppose que $\sigma + \lambda \neq 0$).

3. Et en dimension supérieure ?

Exercice IV. Principe du maximum et conditions au bord

Soit l'équation du transport

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + v \cdot \nabla_x f(t,x) + \sigma f = Q(f),$$

avec $\sigma > 0$ et

$$Q(f) = \sigma \frac{\int_{|v|=1} f dv}{\int_{|v|=1} dv} = \sigma \langle f \rangle,$$

pour des particules monocinétiques $|v| = 1$ (pour simplifier). On considère un domaine $x \in \Omega$ borné.

1. On considère les conditions au bord usuelles de Dirichlet ou de réflexion. Les écrire.

2. Soit $f \mapsto \varphi(f)$ une fonction positive deux fois dérivable avec $\varphi''(f) \geq 0$, $\varphi(f) \geq 0$ et $\varphi(0) = 0$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\int_{|v|=1} \varphi(f)dxdv \leq 0.$$

3. Montrer que

$$\int_{\Omega}\int_{|v|=1} \varphi(f(T))dxdv \leq \int_{\Omega}\int_{|v|=1} \varphi(f_0)dxdv$$

pour $\varphi(f) = \max(0, -f)$. En déduire que si $f_0 \geq 0$ alors $f(T)$ aussi.
4. Que dire pour la borne supérieure de f ?

Exercice V. Un modèle de population de cellules en laboratoire sans condition au bord

Soit une population de cellules avec un modèle structuré en age. L'inconnue est $n(t,a)$. Le vieillissement se contrôle par l'ajout journalier d'une substance chimique. L'équation est

$$\frac{\partial n}{\partial t}(t,a) + \frac{\partial}{\partial a}\Big(v(a)n(t,a)\Big) = 0.$$

1. Interpréter les cas $v \equiv 1$ et $v \equiv 0$. Le cas général correspond alors à $0 \leq v \leq 1$.
2. Soit

$$N(t) = \int_0^{\infty} n(t,a)da$$

le nombre total de cellules au temps t. Montrer que N est croissant en temps, et constant si $n(t,0) = 0$. Cela est-il normal ? Aurait-on eu un même comportement avec un modèle

$$\frac{\partial n}{\partial t}(t,a) + v(a)\frac{\partial n}{\partial a}(t,a) = 0 \quad ?$$

3. Déterminer n en fonction de n_0 le nombre de cellules par tranche d'age à $t = 0$.
4. Montrer que si $|v(a)| \leq Ca$ pour a proche de 0, alors le modèle n'a besoin pas de condition au bord de type natalité ($n(t,0) = \cdots$) pour être bien posé.
5. On suppose $v(a) > 0$ pour $a > 0$. Montrer qu'on a le même résultat sous la condition

$$\int_0^{\cdot} \frac{1}{v(a)}da = \infty.$$