ECOLE POLYTECHNIQUE
3ème année, MAP 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Corrigé de l'examen écrit du 20 Mars 2013

1. Transport et diffusion: 10 points

1a) Pour $\phi \in \mathfrak{H}_0$, on a $A\phi = \psi$ ssi $(\lambda+\sigma)\phi = \psi+\sigma\langle\phi\rangle$ so that $(\lambda+\sigma)\langle\phi\rangle = \langle\psi\rangle+\sigma\langle\phi\rangle$. Alors $\langle\phi\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle\psi\rangle$ et donc

$$\phi = \frac{1}{\lambda+\sigma}\psi + \frac{\sigma}{\lambda(\lambda+\sigma)}\langle\psi\rangle =: A^{-1}\psi\,.$$

1b) On a

$$A\phi = (\lambda+\sigma)(\phi-\langle\phi\rangle) + \lambda\langle\phi\rangle \text{ et } (\phi-\langle\phi\rangle|\langle\phi\rangle) = 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|A\phi\|^2_{\mathfrak{H}_0} &= (\lambda+\sigma)^2\|\phi-\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \lambda^2\|\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}\\ &\le (\lambda+\sigma)^2(\|\phi-\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \|\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}) \le (\lambda+\sigma)^2\|\phi\|^2_{\mathfrak{H}_0}\,.\end{aligned}$$

Ainsi A est continue sur $\mathfrak{H}_0$ et $\|A\| = \lambda+\sigma$. (Le calcul ci-dessus montre que $\|A\| \le \lambda+\sigma$; pour l'égalité, observer que $A\mu = (\lambda+\sigma)\mu$.) De même

$$A^{-1}\psi = \frac{1}{\lambda+\sigma}(\psi-\langle\psi\rangle) + \frac{1}{\lambda}\langle\psi\rangle\,.$$

et A^{-1} est continue sur $\mathfrak{H}_0$ avec $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\lambda}$.
1c) On a

$$\begin{aligned}(A\phi|\phi) = (\lambda+\sigma)(\phi-\langle\phi\rangle|\phi) + \lambda(\langle\phi\rangle|\phi) &= (\lambda+\sigma)\|\phi-\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \lambda\|\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}\\ &\ge \lambda(\|\phi-\langle\phi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \|\langle\psi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}) = \lambda\|\phi\|^2_{\mathfrak{H}_0}\,,\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}(A^{-1}\psi|\psi) = \frac{1}{\lambda+\sigma}(\psi-\langle\psi\rangle|\psi) + \frac{1}{\lambda}(\langle\psi\rangle|\psi) &= \frac{1}{\lambda+\sigma}\|\psi-\langle\psi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \frac{1}{\lambda}\|\langle\psi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}\\ &\ge \frac{1}{\lambda+\sigma}(\|\psi-\langle\psi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \|\langle\psi\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}) = \frac{1}{\lambda+\sigma}\|\psi\|^2_{\mathfrak{H}_0}\,.\end{aligned}$$

Donc $\alpha^+ = \lambda = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ et $\alpha^- = \frac{1}{\lambda+\sigma} = \frac{1}{\|A\|}$.
2) La forme bilinéaire a est symétrique sur $\mathfrak{H}$ parce que les opérateurs A et A^{-1} sont auto-adjoints sur $\mathfrak{H}_0$, étant combinaisons linéaires de l'identité et de l'opérateur $\phi \mapsto \langle\phi\rangle$ qui est auto-adjoint, car $(\langle\phi\rangle|\psi) = \langle\phi\rangle\langle\psi\rangle = (\langle\psi\rangle|\phi)$. On a

$$\begin{aligned}|a(f,g)| &\le |(\mu\partial_x g|A^{-1}(\mu\partial_x f))| + |(Af|g)|\\ &\le \|\mu\partial_x g\|_{\mathfrak{H}_0}\|A^{-1}(\mu\partial_x f)\|_{\mathfrak{H}_0} + \|Af\|_{\mathfrak{H}_0}\|g\|_{\mathfrak{H}_0}\\ &\le \|A^{-1}\|\|\mu\partial_x g\|_{\mathfrak{H}_0}\|\mu\partial_x f\|_{\mathfrak{H}_0} + \|A\|\|f\|_{\mathfrak{H}_0}\|g\|_{\mathfrak{H}_0}\\ &\le (\|A^{-1}\| + \|A\|)\sqrt{[f|f][g|g]}\end{aligned}$$

de sorte que l'on peut prendre $C = \|A^{-1}\| + \|A\| = \frac{1}{\lambda} + \lambda + \sigma$, et

$$\begin{aligned}a(f,f) &= (\mu\partial_x f|A^{-1}(\mu\partial_x f)) + (Af|f)\\ &\ge \alpha^-\|\mu\partial_x f\|^2_{\mathfrak{H}_0} + \alpha^+\|f\|^2_{\mathfrak{H}_0} \ge \min(\alpha^+,\alpha^-)[f|f]\,,\end{aligned}$$

de sorte que l'on peut prendre $c = \min(\alpha^+, \alpha^-)$. Cette dernière inégalité montre que la forme bilinéaire symétrique a est définie positive sur $\mathfrak{H}_0$.
3) La forme linéaire ℓ_S est continue sur $\mathfrak{H}$ car

$$\begin{aligned}|\ell_S(g)| &\le |(A^{-1}S|\mu\partial_x\gamma)| + |(S|g)| \\ &\le \|A^{-1}S\|_{\mathfrak{H}_0}\|\mu\partial_x g\|_{\mathfrak{H}_0} + \|S\|_{\mathfrak{H}_0}\|g\|_{\mathfrak{H}_0} \\ &\le \|S\|_{\mathfrak{H}_0}(\|A^{-1}\|\|\mu\partial_x g\|_{\mathfrak{H}_0} + \|g\|_{\mathfrak{H}_0}) \\ &\le \|S\|_{\mathfrak{H}_0}(1+\tfrac{1}{\lambda})\sqrt{[g|g]}\,.\end{aligned}$$

D'après le 2), la forme bilinéaire a est continue et coercive sur $\mathfrak{H}_0$; d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique élément $f \in \mathfrak{H}$ tel que $a(f,\cdot) = \ell_S$, c.a.d. que

$$a(f,\phi) = \ell_S(\phi) \quad \text{pour tout } \phi \in \mathfrak{H}\,.$$

4) Soit $f \in X_L$ solution de (BSL) au sens usuel. Alors $\mu\partial_x f \in \mathfrak{H}_0$ de sorte que $A^{-1}(\mu\partial_x f) \in \mathfrak{H}_0$ a bien un sens. Donc

$$A^{-1}(\mu\partial_x f) + f = A^{-1}S\,.$$

Soit $\phi \in X_L$; multiplions chaque membre de cette égalité par $\mu\partial_x\phi$ de sorte que, après intégration sur $[0,L]\times[-1,1]$:

$$(\mu\partial_x\phi|A^{-1}(\mu\partial_x f)) + \tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 \mu\partial_x\phi(x,\mu)f(x,\mu))dxd\mu = (A^{-1}(S)|\mu\partial_x\phi)\,.$$

Comme $f,\phi \in X_L$, on peut intégrer par parties pour montrer que

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 \mu\partial_x\phi(x,\mu)f(x,\mu))d\mu dx &= \left[\tfrac{1}{2}\int_{-1}^1 \mu f(x,\mu)\phi(x,\mu)d\mu\right]_0^L \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 \mu\partial_x f(x,\mu)\phi(x,\mu))d\mu dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 \mu\partial_x f(x,\mu)\phi(x,\mu))d\mu dx\end{aligned}$$

car

$$\int_{-1}^1 \mu f(0,\mu)\phi(0,\mu)d\mu = \int_{-1}^1 \mu f(L,\mu)\phi(L,\mu)d\mu = 0$$

puisque $(I-\mathcal{R})(f\phi)\big|_{x=0} = (I-\mathcal{R})(f\phi)\big|_{x=L} = 0$. Ainsi

$$\tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 \mu\partial_x\phi(x,\mu)f(x,\mu))dxd\mu = -(\mu\partial_x f|\phi) = (Af - S|\phi)$$

de sorte que

$$a(f,\phi) - (S|\phi) = (\mu\partial_x\phi|A^{-1}(\mu\partial_x f)) + (Af - S|\phi) = (A^{-1}(S)|\mu\partial_x\phi) = \ell_S(\phi) - (S|\phi)\,,$$

ce qui équivaut à $a(f,\phi) = \ell_S(\phi)$.
5) Multiplions l'équation dans (BLS) par f et intégrons sur $[0,L]\times[-1,1]$: on trouve que

$$\begin{aligned}0 &= \tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 f(x,\mu)(\mu\partial_x f(x,\mu) + \sigma(f(x,\mu) - \langle f\rangle(x))d\mu dx \\ &= \sigma(f - \langle f\rangle|f) = \sigma\|f - \langle f\rangle\|^2_{\mathfrak{H}_0}\end{aligned}$$

car
$$\tfrac{1}{2}\int_0^L\int_{-1}^1 f(x,\mu)\mu\partial_x f(x,\mu)d\mu dx = \left[\tfrac{1}{4}\int_{-1}^1 \mu f(x,\mu)^2 d\mu\right]_0^L = 0$$
puisque $(I-\mathcal{R})(f^2)\big|_{x=0} = (I-\mathcal{R})(f^2)\big|_{x=L} = 0$. Donc
$$\mu\partial_x f + \sigma(f - \langle f\rangle) = 0 \Rightarrow \mu\partial_x f = f - \langle f\rangle = 0 \text{ sur } [0,L]\times[-1,1]\,,$$
autrement dit
$$f = \langle f\rangle \text{ et } \mu\partial_x\langle f\rangle = 0 \Rightarrow \partial_x\langle f\rangle = 0$$
de sorte que f est une fonction constante à la fois en x et en μ. Réciproquement, toute fonction f constante en (x,μ) appartient évidemment à X_L et vérifie (BLS).
6) Supposons que $\lambda f = Bf$ avec $f \in X_L$.

Si $\lambda > 0$, on a vu au 4) que f est solution faible de (BLS) dans $\mathfrak{H}$ avec $S = 0$. Par unicité de la solution faible (cf. 3), on conclut que $f = 0$. Donc λ n'est pas valeur propre de l'opérateur B sur l'espace X_L.

Pour $\lambda = 0$ et $S = 0$, la fonction $f = 1$ est solution de (BLS). Donc $\lambda = 0$ est valeur propre réelle de l'opérateur B sur l'espace X_L et c'est la plus grande.
7) Non, car la plus grande valeur propre de l'opérateur B est 0 indépendemment de la valeur $L > 0$ choisie.

2. Schéma numérique: 10 points

1) Un calcul facile donne la matrice A de taille $N\times N$ sous la forme
$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
pour le schéma décentré amont et sous la forme
$$A_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
pour le schéma centré.
2) On multiplie la définition du schéma suivante
$$U^{n+1} - U^n + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}A(U^{n+1}+U^n) = 0$$
par $(U^{n+1}+U^n)$ (en prenant le produit scalaire) ce qui donne
$$\|U^{n+1}\|^2 - \|U^n\|^2 + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}A(U^{n+1}+U^n)\cdot(U^{n+1}+U^n) = 0.$$
Comme on a supposé que la matrice A est positive, on en déduit
$$\|U^{n+1}\|^2 \le \|U^n\|^2 \le \cdots \le \|U^0\|^2,$$
donc le schéma est inconditionnellement stable en norme L^2.

3) Un calcul simple donne

$$A_d U \cdot U = \sum_{j=1}^{N} U_j (U_j - U_{j-1}) = \|U\|^2 - \sum_{j=1}^{N} U_j U_{j-1} \geq 0,$$

par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la dernière somme.

Par ailleurs, on a

$$A_c U \cdot U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} U_j (U_{j+1} - U_{j-1}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} U_j U_{j+1} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} U_j U_{j+1} = 0,$$

à cause des conditions aux limites de périodicité.

4) Pour exploiter la forme du schéma on pratique les développements de Taylor autour du point $t_{n+1/2}, x_j$, ce qui assure l'ordre 2 en temps.

On calcule l'erreur de troncature du schéma décentré amont

$$E = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} \Big((\delta u)(t_{n+1}, x_j) + (\delta u)(t_n, x_j) \Big)$$

avec

$$(\delta u)(t_n, x_j) = u(t_n, x_j) - u(t_n, x_{j-1}).$$

Un développement de Taylor conduit à

$$E = \frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t)^2 + a \frac{\partial u}{\partial x}(t_{n+1/2}, x_j) + \frac{a \Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

ce qui prouve que le schéma est consistant, précis à l'ordre 2 en temps et à l'ordre 1 en espace.

Pour le schéma centré, l'erreur de troncature est

$$E = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + \frac{a}{4\Delta x} \Big((\delta u)(t_{n+1}, x_j) + (\delta u)(t_n, x_j) \Big)$$

avec

$$(\delta u)(t_n, x_j) = u(t_n, x_{j+1}) - u(t_n, x_{j-1}).$$

Un calcul similaire donne

$$E = \frac{\partial u}{\partial t}(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t)^2 + a \frac{\partial u}{\partial x}(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

ce qui prouve que le schéma est consistant, précis à l'ordre 2 en temps et en espace.

5) En posant $c = \frac{a\Delta t}{2\Delta x}$, la matrice $(I + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} A_d)$ vaut

$$I + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} A_d = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & 0 & -c \\ -c & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & -c & 1+c \end{pmatrix}$$

qui est clairement une M-matrice stricte (les coefficients extra-diagonaux sont négatifs et la somme des coefficients sur chaque ligne est strictement positive). En particulier, $(I + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} A_d)$ est inversible. D'autre part on a

$$I - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} A_d = \begin{pmatrix} 1-c & 0 & 0 & c \\ c & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & c & 1-c \end{pmatrix}$$

dont tous les coefficients sont positifs si $c \leq 1$.

Le schéma décentré amont peut donc se récrire

$$U^{n+1} = (I + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} A_d)^{-1} (I + \frac{a\Delta t}{2\Delta x} A_d) U^n.$$

Or l'inverse d'une M-matrice inversible a tous ses coefficients positifs. Donc U^n s'obtient à partir de U^0 par multiplication par la puissance n-ème d'une matrice positive. Le schéma vérifie donc le principe du maximum discret, sous la condition CFL $\Delta t \leq 2\Delta x / a$.