Ecole polytechnique, 3ème année, MAP-MAT 567
Transport et diffusion (G. Allaire, F. Golse)
Examen écrit du 15 Février 2016 (2 heures)

Les problèmes I et II sont indépendants. La qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation. **Les résultats finaux de tous les calculs demandés devront être encadrés**.

Problème I

On considère l'équation de Boltzmann linéaire dans le cas monocinétique avec scattering isotrope et symétrie de type slab, d'inconnue $u \equiv u(t,x,\mu)$:

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t u + \mu \partial_x u + \sigma(u - \langle u \rangle) = 0\,, & 0 < x < 1\,,\ 0 < |\mu| \leq 1\,, \\ u(t,0,\mu) = 0\,, & 0 < \mu \leq 1\,, \\ u(t,1,\mu) = 0\,, & -1 \leq \mu \leq 0\,, \\ u(0,x,\mu) = u^0(x,\mu)\,, & \end{cases}$$

avec $\sigma > 0$, une donnée initiale (régulière) $u^0(x,\mu) \geq 0$, et où l'on note

$$\langle u \rangle(t,x) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} u(t,x,\mu) d\mu\,.$$

On discrétise le problème (P) avec le schéma décentré amont implicite en temps. Pour un entier $N \geq 1$ on définit le pas d'espace $\Delta x = 1/(N+1)$. Pour un entier $K \geq 1$ on définit le pas d'intégration en vitesse $\Delta\mu = 1/K$. Le pas de temps est noté $\Delta t > 0$. On note $x_j = j\Delta x$ les points d'espace pour $0 \leq j \leq N+1$, $t^n = n\Delta t$ les temps discrets pour $n \geq 0$, $\mu^k = \pm(k - 1/2)\Delta\mu$ les vitesses discrètes, pour $1 \leq k \leq K$, et $u^n_{j,k}$ l'approximation de la solution u en (t^n, x_j, μ^k). Si $\mu^k > 0$, le schéma s'écrit, pour $n \geq 1$ et $1 \leq j \leq N$,

$$\frac{u^n_{j,k} - u^{n-1}_{j,k}}{\Delta t} + \mu^k \frac{u^n_{j,k} - u^n_{j-1,k}}{\Delta x} + \sigma(u^n_{j,k} - < u^n_j >) = 0$$

avec

$$< u^n_j > = \frac{\Delta\mu}{2} \sum_{|k|=1}^{K} u^n_{j,k}\,,$$

la donnée initiale $u^0_{j,k} = u(x_j, \mu^k)$ et les conditions aux limites

$$u^n_{0,k} = 0 \text{ si } \mu^k > 0\,, \quad u^n_{N+1,k} = 0 \text{ si } \mu^k < 0\,.$$

1) Ecrire le schéma décentré amont implicite lorsque $\mu^k < 0$.
2) On note u^n le vecteur de composantes $u^n_{j,k}$. Montrer que le schéma se met sous la forme

$$M u^n = u^{n-1}\,,$$

avec une matrice M dont on précisera la structure.
3) Montrer que la matrice M est une M-matrice stricte. En déduire que le schéma est bien défini, c'est-à-dire que l'on peut calculer de manière unique u^n.
4) Montrer que la solution discrète $u^n_{j,k}$ reste positive au cours du temps.
5) Démontrer l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{N} < u^n_j > \leq \sum_{j=1}^{N} < u^{n-1}_j > \,.$$

En déduire la stabilité du schéma dans une norme L^1 discrète.
6) Que peut-on dire de la convergence du schéma ?

Problème II

Dans tout ce problème, on notera S la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par la formule

$$S(z) = \frac{\sin z}{z}\,, \qquad z \neq 0\,, \qquad S(0) = 1\,.$$

Soit $f \equiv f(t,x,\mu)$ où $x \in \mathbf{R}$ et $|\mu| \leq 1$ solution de

$$(\partial_t + \mu\partial_x)f = \langle f\rangle - f\,, \quad f(t,x,\mu) = f(t,x+1,\mu)\,, \quad f(0,x,\mu) = \rho^{in}(x)\,,$$

où

$$\langle f\rangle(t,x) := \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t,x,\mu)d\mu\,.$$

Comme f est périodique de période 1 en la variable x, on la représentera par sa série de Fourier en x, dont les coefficients seront notés

$$\hat{f}(t,k,\mu) := \int_0^1 f(t,x,\mu)e^{-i2\pi kx}dx\,, \qquad \text{pour tout } k \in \mathbf{Z}\,.$$

1) Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $\hat{f}(t,k,\mu)$.
2) Exprimer $\hat{f}$ en fonction de $\hat{\rho} := \langle\hat{f}\rangle$ et de $\hat{\rho}^{in}$.
3) Calculer $\hat{\rho}(t,0)$, et préciser la signification physique de ce résultat.
4) En déduire une équation intégrale satisfaite par $\hat{\rho}$, de la forme

$$\hat{\rho}(t,k) - \int_0^t M(t-s,k)\hat{\rho}(s,k)ds = \hat{P}(t,k)\,, \quad t \geq 0\,,$$

où M et $\hat{P}$ sont des fonctions que l'on calculera. (On pourra moyenner en μ chaque membre de l'égalité obtenue à la question 2.)
5) Soit $\alpha > 0$. Quelle est l'équation intégrale satisfaite par $e^{\alpha t}\hat{\rho}(t,k)$?
6) Montrer que, pour $0 \leq \alpha < 1$, pour tout $k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$ et tout $u \in C(\mathbf{R}_+)$

$$\left|e^{\alpha t}\int_0^t M(t-s,k)u(s)ds\right| \leq \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\pi(1-\alpha)}\right)\sup_{s\geq 0} e^{\alpha s}|u(s)|\,.$$

(On pourra décomposer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-(1-\alpha)t}|S(2\pi kt)|dt$$

sur les intervalles $[0,1/(2|k|)]$ et $[1/(2|k|),\infty[$.)
7) Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1-\frac{2}{\pi}[$, il existe une constante $C_\alpha > 0$ que l'on explicitera telle que

$$|\hat{\rho}(t,k)| \leq C_\alpha e^{-\alpha t}|\hat{\rho}^{in}(k)| \quad \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } k \neq 0\,.$$

8) En utilisant l'égalité de Parseval, montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1-\frac{2}{\pi}[$ et tout $t > 0$

$$\left\|\rho(t,\cdot) - \int_0^1 \rho^{in}(y)dy\right\|_{L^2(0,1)} \leq C_\alpha e^{-\alpha t}\|\rho^{in}\|_{L^2(0,1)}\,.$$

9) Montrer que, pour tout $\alpha \in [0,1-\frac{2}{\pi}[$, il existe une constante $C'_\alpha > 0$ que l'on explicitera telle que, pour tout $t > 0$

$$\left\|f(t,\cdot,\cdot) - \int_0^1 \rho^{in}(y)dy\right\|_{L^2([0,1]\times[-1,1])} \leq C'_\alpha e^{-\alpha t}\|\rho^{in}\|_{L^2(0,1)}\,.$$