

Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Problèmes aux valeurs propres linéaires et non-linéaires

Sujet proposé par Eric Cancès (cances@cermics.enpc.fr)

Ce projet porte sur la résolution numérique de problèmes aux valeurs propres elliptiques linéaires et non-linéaires. Ce type de problèmes se rencontre dans de nombreuses applications en physique et en sciences de l'ingénieur. Citons à titre d'exemples le calcul des états stationnaires de systèmes quantiques, ou des modes de vibration de structures élastiques.

Nous considérons dans ce projet des problèmes aux valeurs propres elliptiques (linéaires ou non-linéaires) posés sur l'ouvert $\Omega =]0, 2\pi[^d$ ($d = 1$ ou $d = 2$) avec conditions aux bords périodiques. Pour définir un cadre fonctionnel approprié à l'étude de ces problèmes, nous introduisons les notations suivantes :

- $\mathcal{R} = 2\pi\mathbb{Z}^d$ désigne le réseau de périodicité ; on dit qu'une fonction $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{R}$ -périodique si

$$\forall R \in \mathcal{R}, \quad v(x - R) = v(x) \text{ pour presque tout } x ;$$

- pour tout $1 \leq p < \infty$, $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_K |v|^p < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$;
- on pose enfin

$$L_{\text{per}}^p(\Omega) = \left\{ v \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d) \mid v \text{ } \mathcal{R}\text{-périodique} \right\}, \quad \|v\|_{L_{\text{per}}^p} = \left(\int_{\Omega} |v|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$H_{\text{per}}^1(\Omega) = \left\{ v \in L_{\text{per}}^2(\Omega) \mid \nabla v \in (L_{\text{per}}^2(\Omega))^d \right\}$$

$$L_{\text{per}}^\infty(\Omega) = \left\{ v \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \mid v \text{ } \mathcal{R}\text{-périodique} \right\}$$

où ∇v désigne le gradient faible de v . Lorsqu'on les munit respectivement des produits scalaires définis par

$$(v, w)_{L_{\text{per}}^2} = \int_{\Omega} v(x) w(x) dx \quad \text{et} \quad (v, w)_{H_{\text{per}}^1} = \int_{\Omega} v(x) w(x) dx + \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \nabla w(x) dx,$$

$L_{\text{per}}^2(\Omega)$ et $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert. De plus, l'injection de $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ dans $L_{\text{per}}^2(\Omega)$ est compacte, et il en est de même de l'injection de $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ dans $L_{\text{per}}^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ (en dimension 1 et 2).

Soit $W \in L_{\text{per}}^\infty(\Omega)$ et a la forme bilinéaire sur $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ définie par

$$a(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w + \int_{\Omega} W v w,$$

Pour tout réel $\mu \geq 0$, on note E_μ la fonctionnelle d'énergie sur $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ définie par

$$E_\mu(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + \frac{\mu}{4} \int_{\Omega} v^4,$$

et on pose

$$I(\mu) = \inf \left\{ E_\mu(v), v \in H_{\text{per}}^1(\Omega), \int_{\Omega} v^2 = 1 \right\}. \quad (1)$$

On peut montrer que le problème (1) a exactement deux solutions u_μ et $-u_\mu$, l'une de ces deux solutions (disons u_μ) étant positive ou nulle sur $\mathbb{R}^d$.

1 - ETUDE THÉORIQUE

Question 1. En utilisant le Théorème 10.2.8 du cours [1], montrer qu'il existe un réel λ_μ tel que

$$-\Delta u_\mu + W u_\mu + \mu u_\mu^3 = \lambda_\mu u_\mu.$$

Question 2. En adaptant la preuve du Théorème 7.3.5 du cours [1], montrer qu'il existe une suite croissante $(\nu_k)_{k \geq 1}$ de réels qui tend vers $+\infty$, et une base hilbertienne $(v_k)_{k \geq 1}$ de $L_{\text{per}}^2(\Omega)$ telles que chaque v_k appartienne à $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ et vérifie

$$-\Delta v_k + W v_k + \mu u_\mu^2 v_k = \nu_k v_k. \quad (2)$$

Question 3. On suppose dans cette question que $d = 1$.

3a. On peut montrer que si $v \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$, alors $|v| \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ et $|\nabla|v|| = |\nabla v|$ presque partout. En utilisant ce résultat, déduire de la formule de Courant-Fischer que $|v_1|$ vérifie

$$-|v_1|'' + W|v_1| + \mu u_\mu^2 |v_1| = \nu_1 |v_1|.$$

3b. Montrer que si $v \in H_{\text{per}}^1(\Omega)$ vérifie

$$-v'' + Wv + \mu u_\mu^2 v = \nu v$$

pour un certain $\nu \in \mathbb{R}$, et si $v \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $v > 0$ en tout point de $\mathbb{R}$.

3c. En déduire que $\lambda_\mu = \nu_1 < \nu_2$ et que $u_\mu = |v_1|$.

Ce résultat, établi ici pour $d = 1$, reste vrai pour $d = 2$.

2 - ANALYSE NUMÉRIQUE

Soit V un sous-espace vectoriel de $H_{\text{per}}^1(\Omega)$ de dimension finie N et

$$I^V(\mu) = \inf \left\{ E_\mu(v), v \in V, \int_{\Omega} v^2 = 1 \right\}. \quad (3)$$

Question 4. Montrer que (3) possède un minimiseur $u_{\mu,V}$ vérifiant $\int_{\Omega} u_{\mu,V} \geq 0$. Soit $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ une base de V et $U \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad u_{\mu,V}(x) = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(x).$$

Montrer qu'il existe $\lambda_{\mu,V} \in \mathbb{R}$ tel que U soit solution d'un problème aux valeurs propres généralisé non-linéaire de la forme

$$\begin{cases} A_U U = \lambda_{\mu,V} M U \\ U^T M U = 1 \end{cases} \quad (4)$$

où U^T est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne U , où M est une matrice symétrique réelle définie positive, et où A_U est une matrice symétrique réelle dépendant de U . Exprimer les coefficients des matrices M et A_U en fonction des fonctions $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$, du champ W , du réel μ et du vecteur U .

On cherchera une solution de (3) en résolvant le problème (4) par l'algorithme itératif suivant :

- initialisation : choisir un vecteur $U^0 \in \mathbb{R}^N$;
- itérations : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, assembler la matrice A_{U^n} et résoudre le problème aux valeurs propres généralisé *linéaire*

$$\begin{cases} A_{U^n} V = \lambda M V \\ V^T M V = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Prendre pour U^{n+1} un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre du problème ci-dessus et tel que

$$\sum_{j=1}^N [U^{n+1}]_j \int_{\Omega} \phi_j \geq 0.$$

Question 5. On suppose dans cette question que $\mu = 0$.

5a. Montrer que

$$\lambda_{0,V} - \lambda_0 = a(u_{0,V} - u_0, u_{0,V} - u_0) - \lambda_0 \|u_{0,V} - u_0\|_{L_{\text{per}}^2}^2.$$

5b. En déduire qu'il existe une constante réelle positive C indépendante de V telle que

$$0 \leq \lambda_{0,V} - \lambda_0 \leq C \|u_{0,V} - u_0\|_{H_{\text{per}}^1}^2.$$

Ce résultat montre que l'erreur sur la valeur propre converge vers 0 au moins aussi vite que le carré de l'erreur en norme H_{per}^1 sur le vecteur propre.

3 - DISCRÉTISATION PAR MÉTHODES SPECTRALES EN DIMENSION 1

Soit $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $L_{\text{per}}^2(\Omega)$, où $\Omega =]0, 2\pi[$, telle que

$$e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1, \quad e_{2k-1}(x) = \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2k}(x) = \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}.$$

Question 6. En utilisant le Théorème 7.3.2 et la remarque 7.3.3 du cours [1], montrer que $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2_{\text{per}}(\Omega)$ et que

$$H^1_{\text{per}}(\Omega) = \left\{ v = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k e_k \mid \alpha_k \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 + |k|^2) |\alpha_k|^2 < \infty \right\}.$$

Question 7. Ecrire un programme SCILAB permettant de résoudre, pour un champ $W \in L^\infty_{\text{per}}(\Omega)$ et un réel positif ou nul μ donnés, le problème (3) par la méthode décrite ci-dessus pour $V = V_M := \text{Vect}(e_0, e_1, e_2, \dots, e_{2M}, e_{2M+1})$. Ce programme devra fournir comme sorties pour chacune des valeurs de M comprises entre 1 et 20 :

- une approximation λ_{μ, V_M} de la valeur du réel λ_μ ;
- des approximations des erreurs $\|u_{\mu, V_M} - u_\mu\|_{L^2_{\text{per}}}$, $\|u_{\mu, V_M} - u_\mu\|_{H^1_{\text{per}}}$ et $|\lambda_{\mu, V_M} - \lambda_\mu|$, obtenues en prenant comme solution de référence la solution numérique correspondant à $M = 40$.

Vérifier que si on choisit $U_0^h = 0$, l'algorithme itératif converge si μ est assez petit, mais diverge si μ est trop grand.

Question 8. Choisir $\mu > 0$ pas trop grand. Tracer les erreurs $\|u_{\mu, V_M} - u_\mu\|_{L^2_{\text{per}}}$, $\|u_{\mu, V_M} - u_\mu\|_{H^1_{\text{per}}}$ et $|\lambda_{\mu, V_M} - \lambda_\mu|$ en fonction de M en échelles log-log pour les champs W suivants :

- $\forall x \in [0, 2\pi]$, $W(x) = \sin(4x)$;
- $\forall x \in [0, 2\pi]$, $W(x) = |\sin(x)|$;
- $\forall x \in [0, \pi]$, $W(x) = 0$, $\forall x \in [\pi, 2\pi]$, $W(x) = 1$.

Estimer la vitesse de convergence de ces diverses mesures de l'erreur. Que constate-t-on ?

4 - DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS EN DIMENSION 2

On considère le cas où $d = 2$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{N}$, et on note $\mathcal{T}_h$ le maillage uniforme de Ω comprenant $2N^2$ triangles et construit sur le modèle du maillage représenté sur la Figure 6.12 du cours [1]. On considère l'espace d'approximation

$$V = \{v \in C^0(\mathbb{R}^2) \text{ tel que } v|_{K_i} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour tout } K_i \in \mathcal{T}_h \text{ et } v \text{ } \mathcal{R}\text{-périodique}\}.$$

Pour simplifier, on prendra $\mu = 0$ et on choisira le potentiel $W(x, y)$ de telle sorte que la solution u_0 de (1) soit égale à $u_0(x, y) = 2 + \cos^4(x) \sin^3(y)$.

Question 9. Ecrire un programme FREEFEM++ permettant de résoudre le problème (3). Ce programme devra effectuer le calcul pour

$$N = 5, \quad N = 10, \quad N = 20, \quad N = 40, \quad N = 80, \quad N = 160,$$

et fournir comme sorties :

- une approximation $\lambda_{0, V}$ de λ_0 ;
- les erreurs $\|u_{0, V} - u_0\|_{L^2_{\text{per}}}$, $\|u_{0, V} - u_0\|_{H^1_{\text{per}}}$ et $|\lambda_{0, V} - \lambda_0|$.

Question 10. Tracer les erreurs $\|u_{0, V} - u_0\|_{L^2_{\text{per}}}$, $\|u_{0, V} - u_0\|_{H^1_{\text{per}}}$ et $|\lambda_{0, V} - \lambda_0|$ en fonction de N en échelles log-log. Estimer la vitesse de convergence de ces diverses mesures de l'erreur.

Références

- [1] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Ecole Polytechnique, Edition 2009.