Mini-Projet d'analyse numérique du cours MAP 431
Solidification

J.F. Bonnans

January 11, 2011

1 Introduction

La coulée de l'acier en lingots peut se modéliser comme une équation de la chaleur prenant en compte la chaleur latente lors du changement de phase. Plus précisément, soit Ω une partie ouverte et bornée de $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, de frontière notée $\partial\Omega$. Posons $Q := \Omega \times [0,T]$. Définissons la fonction enthalpie G comme une multiapplication $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(v) = \begin{cases} c_1 v & \text{si } v < 0, \\ [0, L] & \text{si } v = 0, \\ L + c_2 v & \text{si } v > 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ sont les capacités calorifiques des phases solides et liquides resp., $v = 0$ est la température de changement de phase, et $L > 0$ est la chaleur latente. L'enthalpie représente la quantité de chaleur accumulée. L'équation de la chaleur biphasique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} G(u(x,t)) - \mu \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{dans } Q. \tag{2}$$

exprime la loi de conservation de la chaleur, le flux de chaleur étant, suivant la loi de Fourier, $\mu \nabla u(x,t)$, avec $\mu > 0$. La condition initiale est donnée :

$$u(x,0) = u^0(x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \tag{3}$$

Le refroidissement, accéléré par des fluides, se traduit par une extraction de chaleur proportionnelle à la différence avec la température extérieure, notant $\Sigma := \partial\Omega \times [0,T]$:

$$-\mu \frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = h(x)(u(x,t) - u_e(x)), \quad \text{pour tout } (x,t) \in \Sigma. \tag{4}$$

Ici n est la normale extérieure, u_e est la température extérieure donnée, et $h(x) > h_0 > 0$ est le coefficient de convection. On se propose d'étudier cette équation d'un point de vue théorique et numérique.

2 Transformation de Fenchel-Legendre

L'estimation a priori de l'équation et du schéma nécessite la notion de transformée de Fenchel-Legendre dont voici une brève étude. On notera la similitude avec la transformée de Fourier.

1. Calculer la primitive $\mathcal{G}$ nulle en zéro de l'enthalpie. Montrer que cette fonction est fortement convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortement convexe. Sa conjuguée de Fenchel-Legendre est la fonction définie par

$$f^*(y) := \sup_x \left(xy - f(x) \right). \tag{5}$$

Montrer que f^* est convexe.

3. Montrer que le supremum dans (5) est atteint en un point unique noté $x(y)$.
4. Montrer que l'application $y \mapsto x(y)$ est lipschitzienne.
5. On sait qu'une fonction convexe a des dérivées directionnelles et on note
$$\partial f(x) := [-f'_g(x), f'_d(x)]. \tag{6}$$
Montrer que $\partial \mathcal{G}(x) = G(x)$, pour tout $x \in I\!R$.
6. Montrer que f^* est dérivable, et a pour dérivée $Df^*(y) = x(y)$.
7. Montrer que $x_0 = x(y_0)$ ssi $y_0 \in \partial f(x_0)$.
8. Montrer que, pour tout x et x', $y \in \partial f(x)$ et $y' \in I\!R$, on a
$$(y - y') \cdot x \geq f^*(y) - f^*(y'). \tag{7}$$
9. Calculer $\mathcal{G}^*$ et traduire la relation précédente quand $f = \mathcal{G}$, c'est à dire
$$(y - y') \cdot x \geq \mathcal{G}^*(y) - \mathcal{G}^*(y'), \quad \text{pour tout } x \in I\!R,\ y \in G(x), \text{ et } y' \in I\!R. \tag{8}$$

3 Etude du schéma semi discret

On suppose la solution assez régulière pour justifier les opérations telles que les intégrations par parties.

1. Si v est une fonction régulière sur Q, on note $\dot{v}$ sa dérivée temporelle. Montrer que la formulation faible suivante est vérifiée si u est assez régulier : pour tout $v \in C^\infty(\bar{Q})$, on a
$$\begin{array}{l} \int_\Omega G(u(x,T))v(x,T)\mathrm{d}x - \int_Q G(u(x,t))\dot{v}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ +\mu \int_Q \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Sigma h(x)u(x,t)v(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ = \int_\Omega G(u_0(x))v(x,0)\mathrm{d}x + \int_\Sigma h(x)u_e(x)v(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \end{array} \tag{9}$$
2. On considère le schéma semi discret en temps
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} - \mu \Delta u_{k+1}(x) = 0, \\ y_k(x) \in G(u_k(x)), \quad k = 1, \ldots, N-1; \\ y_N(x) \in G(u_N(x)) \end{array} \right. \tag{10}$$
où $N \in I\!N_*$, $h := T/N$, avec les mêmes conditions au bord. Donner une formulation faible de l'étape k écrite ci-dessus de ce schéma.
3. Utilisant (8), montrer qu'on obtient une estimation du type (qu'on précisera)
$$\frac{G^*(y_{k+1}(x)) - G^*(y_k(x))}{h} + \mu \int_\Omega |\nabla u_k(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Sigma h(x)u_k(x)^2 \mathrm{d}x + \cdots \leq 0. \tag{11}$$
En déduire une estimation de la solution notée u^h, interpolée linéairement sur $[t_k, t_{k+1}]$ (avec $t_k := kh$) dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega))$.
4. On analyse la résolution des équations non linéaires (10). Montrer que u_{k+1} minimise un potentiel du type suivant, qu'on précisera :
$$P_k(u) := \int_\Omega \mathcal{G}(u(x))\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \tfrac{1}{2} \int_\Sigma h(x)u(x)^2 \mathrm{d}x + \cdots \tag{12}$$
5. On écrit ce potentiel sous la forme $P_k(u) = \int_\Omega \mathcal{G}(u(x))\mathrm{d}x + Q_k(u)$. Montrer que Q est quadratique et discuter la minimisation de P_k par un algorithme d'Uzawa.

Dans la suite on suppose que $\Omega \subset I\!R^2$ est un domaine rectangulaire. On pourra régulariser G par une fonction G_ε, pour $\varepsilon > 0$, telle que $G_\varepsilon \to G$ uniformément, et G_ε est C^∞ de dérivée supérieure ou égale à 1.

On cherchera dans les simulations numériques des données réalistes pour la coulée d'acier.

4 Différences finies

1. Donner un schéma de discrétisation par différences finies explicites qui vérifie un principe de monotonie (u_{k+1} fonction croissante de u_k). On pourra faire le raisonnement pour G_ε en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, et passer à la limite. Fournir une estimation dans L^∞.

2. Donner un schéma de discrétisation par différences finies implicites. On fournira une estimation dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega))$.

3. Implémenter la résolution numérique (pour le schéma implicite, avec l'algorithme d'Uzawa).

5 Eléments finis

1. Donner un schéma de discrétisation par éléments finis. On fournira une estimation de la solution dans l'espace $L^\infty(0,T,L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T,H^1(\Omega))$.

2. Implémenter la résolution numérique avec freeFem (pour le schéma implicite, avec l'algorithme d'Uzawa).

6 Question bonus

Cette question sort du format des mini-projets. Elle n'est en rien obligatoire et toute réponse partielle sera appréciée.

On pourra étendre l'analyse précédente au cas de la coulée continue (cf Wikipedia, article "continuous casting"). Le modèle le plus simple du régime stationnaire suit une tranche de produit et néglige les échanges entre tranches. Le modèle s'écrit alors comme dans (2). La commande consiste à répartir au mieux les pulvérisations d'eau permettant de refroidir le métal, de manière à assurer une solidification totale au plus tôt.

On se limitera à la dimension $n = 1$; par symétrie on fera les calculs sur une demi tranche. En première approximation l'action sur les débits d'eau se traduit par un coefficient de convection dépendant du temps $h(t)$ (on omet la variable x qui est le point du bord) qui est une variable de commande, soumise aux contraintes

$$h_m(t) \leq h(t) \leq h_M(t), \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

et

$$\int_0^T h(t)\mathrm{d}t \leq H. \tag{14}$$

On se limitera à l'étude de minimisation de la fonction

$$\int_\Omega h(x,T)^2\mathrm{d}x, \tag{15}$$

et en pénalisant (14). Analyser le problème et le résoudre en utilisant la fonction "optim" de scilab.

7 Notes

Le lecteur intéressé par le sujet pourra découvrir d'autres modèles dans Duvaut et Lions [3] et Brézis [2]. La discrétisation est discutée dans Amiez et Gremaud [1] et Grange et Mignot [4].

References

[1] G. Amiez and P.-A. Gremaud. Error estimates for Euler forward scheme related to two-phase Stefan problems. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 26(2):365–383, 1992.

[2] H. Brézis. Problèmes unilatéraux. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 51:1–168, 1972.

[3] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris, 1972.

[4] O. Grange and F. Mignot. Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation paraboliques non linéaires. *J. Functional Analysis*, 11:77–92, 1972.