

Mini-Projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Problème d'homogénéisation

Sujet proposé par Gilles Thouroude
e-mail : thouroude@cmapx.polytechnique.fr

1 Introduction

Nous allons aborder l'étude d'un problème multi-échelle et une technique d'analyse numérique : l'homogénéisation. Nous allons regarder les solutions u^ϵ du problème suivant :

$$-\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{d}{dx}u^\epsilon\right) = f \quad (1)$$

vérifiant des conditions aux limites de Dirichlet.

Il est clair que pour avoir une approximation correcte de u^ϵ il faut que le pas de discrétisation h de l'algorithme soit plus petit que ϵ . Donc, pour pouvoir étudier les limites des solutions u^ϵ lorsque ϵ tend vers 0, il faut chercher quelle équation résout la fonction limite.

Dans l'équation (1), a peut-être vu comme une conductivité thermique et f comme une source de chaleur.

2 Le cas monodimensionnel

Nous allons étudier l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\frac{d}{dx}u^\epsilon\right) = f, F & \text{dans }]0, 1[\\ u^\epsilon(0) = u^\epsilon(1) = 0 \end{cases}$$

Nous allons supposer que a est une fonction périodique, et qu'il existe m et M tels que :

$$0 < m \leq a(x) \leq M, \quad \forall x \in]0, 1[$$

De plus, on notera $\langle a \rangle$ la moyenne de a , c'est à dire : $\langle a \rangle = \int_0^1 a(x)dx$
On supposera que f est dans L^2 .

1. Ecrire la formulation variationnelle du problème. Montrer qu'il existe une seule et unique solution, u^ϵ , au problème.
2. Montrer que la solution u^ϵ est l'unique minimiseur de l'énergie :

$$\mathcal{F}_\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \left| \frac{du}{dx} \right|^2 - \int_0^1 f v \quad (2)$$

Dans un espace de Banach B on dit qu'une suite h_k converge faiblement vers $\bar{h} \in B$ et on note $h_k \rightharpoonup \bar{h}$ si $\langle h^*, h_k \rangle \rightarrow \langle h^*, \bar{h} \rangle$ pour tout $h^* \in B'$ (dual topologique de B). On admet les résultats suivants :

- (i) Soit $1 < p < \infty$, l'espace dual de L^p est L^q avec q tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et alors $\langle h^*, h_k \rangle = \int h^* h_k$ (donc l'espace dual de L^2 est L^2).
- (ii) De toute suite bornée dans un espace de Hilbert on peut extraire une sous-suite faiblement convergente
- (iii) toute partie convexe fermée d'un espace de Hilbert contient les limites faibles de ses éléments

Et on rappelle que si u^ϵ converge faiblement vers u dans H_0^1 et $v^\epsilon \rightarrow v$, alors il n'y a aucune raison pour que $u^\epsilon v^\epsilon \rightarrow uv$.

3. Soit $u^\epsilon \rightarrow u$ dans L^2 et $v^\epsilon \rightarrow v$ dans L^2 , montrer que : $u^\epsilon v^\epsilon \rightarrow uv$ dans L^2 .

On admettra que le résultat est aussi vrai dans H_0^1 .

4. Montrer que pour toute fonction v dans L^1 :

$$\int_0^1 a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) v(x) dx \rightarrow \langle a \rangle \int_0^1 v \quad (3)$$

Ceci définit la convergence faible de la suite $a(\frac{\cdot}{\epsilon})$ vers $\langle a \rangle$.

5. Montrer alors que si $u^\epsilon \rightarrow u^*$ dans L^2 , $a(\frac{\cdot}{\epsilon})u^\epsilon \rightarrow \langle a \rangle u^*$ dans L^2 .
6. Montrer que u^ϵ et $\frac{d}{dx}u^\epsilon$ sont bornés dans L^2 indépendamment de ϵ . En déduire que $u^\epsilon \rightharpoonup u^*$ dans $H_0^1([0, 1])$ et que $u^\epsilon \rightarrow u^*$ dans L^2 .
7. Montrer que les u^ϵ vérifient :

$$-a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{d}{dx}u^\epsilon = \int_0^x f + c_\epsilon \quad (4)$$

où c_ϵ est une suite de réelle bornée

8. Montrer que la limite u^* vérifie l'équation :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} \frac{d}{dx} u^* \right) = f \quad (5)$$

9. On se retrouve donc avec le coefficient $\frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle}$ au lieu de $\langle a \rangle$. Montrer que $\langle a \rangle = \frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle}$ si et seulement si a est constante presque partout.

10. Ecrire, à l'aide de Scilab, à l'aide d'un schéma aux différences finies qui résout numériquement (5) on prendra :

$$f = 1$$

et

$$a(x) = \begin{cases} 20 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

11. Résolvez, avec un schéma aux différences finies sur Scilab, le problème (1) pour $\epsilon = 1/10, 1/100$.
12. Que se passe-t-il si on prend un pas de discrétisation plus grand que ϵ ?

3 En dimension 2 : le cas des matériaux laminés

Nous allons étudier une structure dont le coefficient a ne dépend que d'une seule variable (x_1). On se retrouve à étudier l'équation suivante :

$$-div \left(\begin{pmatrix} a(\frac{x_1}{\epsilon}) & 0 \\ 0 & a(\frac{x_1}{\epsilon}) \end{pmatrix} \nabla u^\epsilon(x_1, x_2) \right) = f \quad (6)$$

Avec, comme tout à l'heure des conditions de Dirichlet au bord de $Q = [0, 1]^2$.

a peut être vu comme la conductivité thermique lorsque que l'on superpose différents matériaux. On va montrer que cette fois si u^* est solution de l'équation :

$$-div \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} & 0 \\ 0 & \langle a \rangle \end{pmatrix} \nabla u^*(x_1, x_2) \right) = f \quad (7)$$

1. Ecrire le problème variationnel équivalent à (6)

On va poser :

$$\sigma_i^\epsilon(x) = a\left(\frac{x_i}{\epsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} u_\epsilon(x_1, x_2).$$

On peut montrer, comme dans la première partie, que $\sigma_1^\epsilon \rightharpoonup \frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle} \frac{\partial u^*}{\partial x_1}$.

2. On admet la convergence forte de u^ϵ vers u^* dans L^2 . Trouver des fonctions v^ϵ et v (à exprimer en fonction de u^ϵ , u^* et a) telles que $\sigma_2^\epsilon = \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x_2}$ et $v^\epsilon \rightharpoonup v$ dans L^2 .
On peut alors en conclure que u^* est solution du problème (7)
3. A l'aide de freefem++, résolvez le problème (7) (on utilisera des éléments finis de type P_1) en prenant :

$$f = 1.$$

et

$$a(x_1) = \begin{cases} 20 & 0 \leq x_1 \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq x_1 \leq 1 \end{cases}$$

4. En prenant les mêmes forces que précédemment, résolvez numériquement (6) à l'aide de FreeFem++ pour $\epsilon = 1/10, 1/100$
5. Comparer u^ϵ et u^* . Que se passe-t-il si on ne prend pas un pas de discrétisation suffisamment important (on comparera $h = 1/100$ et $h = 1/500$ pour $\epsilon = 1/100$) ?
6. Que se passe-t-il lorsque $\epsilon = 1/100$ et $h = 1/1000$?
7. Mêmes questions pour $f = 10 * x * y$.