

Ondes acoustiques dans un fluide en écoulement

Responsable : Housseem Haddar

housseem.haddar@inria.fr

1 Introduction

On s'intéresse dans ce projet à la propagation d'une onde acoustique dans un milieu en écoulement. On supposera pour simplifier que l'écoulement est uniforme de vitesse V dirigé suivant x et est canalisé dans un tube infini D de hauteur h dans lequel se trouve également un obstacle Ω_0 rigide de frontière Γ . On notera par Ω le domaine occupé par le tube infini privé de Ω_0 et par ∂D la frontière du tube infini (voir Fig. 1).

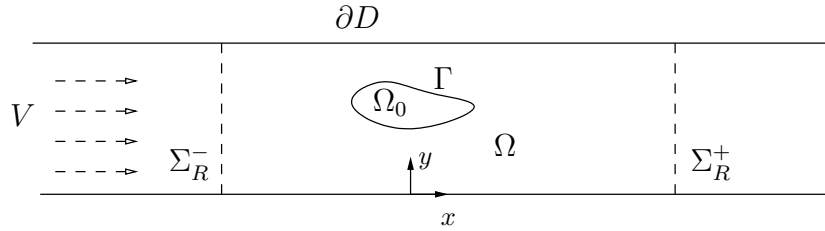


FIG. 1 – Description du modèle

A partir des équations d'Euler linéarisées en vitesse-pression et en régime harmonique de pulsation ω , la pression acoustique $P(x, y, t) = \mathcal{R}(p(x, y)e^{-i\omega t})$ s'obtient via la résolution des équations suivantes :

$$\begin{cases} (1 - M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2 p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial D \cup \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

où $M = \frac{V}{c} < 1$ désigne le nombre de Mach (c vitesse de propagation du son dans le milieu au repos) et $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde. Afin de traduire la présence d'une onde incidente φ_i , solution particulière des équations précédentes dans le tube privé de l'obstacle rigide, on cherche la solution p sous la forme :

$$p = \varphi_i + p_d$$

où φ_i vérifie donc les équations :

$$\begin{cases} (1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + k^2 \varphi_i = 0 & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (2)$$

Question 1. Discuter la pertinence physique de ce modèle en fonction de la taille et la forme de l'obstacle. Ecrire le système d'équations vérifiées par p_d .

2 Détermination de l'onde incidente et réduction en domaine borné

Nous allons dans un premier temps déterminer l'expression des solutions de (2) par séparations des variables.

Question 2 : Montrer que les solutions de (2) à variables séparées sont de la forme :

$$p_n^\pm(x, y) = \gamma_n e^{i\beta_n^\pm x} \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right), \quad n \geq 0, \quad (3)$$

$$\text{avec } \beta_n^\pm := \frac{-kM \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 (1 - M^2)}}{1 - M^2}, \quad (4)$$

γ_n une constante et où la racine carrée est déterminée en imposant à la partie imaginaire d'être positive ou nulle.

On posera par la suite $c_n(y) = \gamma_n \cos\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$ et on choisira la constante γ_n de telle sorte que $\|c_n\|_{L^2(]0, h[)} = 1$. On admettra que la famille de fonctions $(c_n)_{n \geq 0}$ forme une base orthonormale de $L^2(]0, h[)$.

Lorsque $n \leq kh / \left(\pi(1 - M^2)^{\frac{1}{2}}\right)$, la constante β_n^\pm , appelée constante de propagation, est réelle et la fonction p_n est oscillante suivant la direction Ox . On appelle ces solutions particulières des ondes guidées. Par contre, lorsque $n > n_0$, la constante β_n^\pm est imaginaire et on a affaire à des solutions ayant des comportements exponentiels à l'infini. On notera par n_0 la partie entière de $kh / \left(\pi(1 - M^2)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Question 3 : Justifier le fait que les ondes guidées p_n^\pm correspondent à des ondes se propageant vers les $\pm x > 0$.

On choisira, par la suite, une onde incidente de la forme $\varphi_i = p_m^+$.

Afin de pouvoir résoudre le problème initial par une méthode d'éléments finis, il faut se ramener à un problème posé dans un **domaine borné**. Nous allons voir comment la connaissance des solutions à variables séparées permet d'y arriver.

D'un point de vue physique, la pression diffractée correspond à une onde "produite" par le rayonnement de l'obstacle, c'est donc une onde qui se propage depuis l'obstacle vers l'infini. C'est également une onde qui doit être bornée à l'infini.

Question 4 : En utilisant ces arguments "physiques", montrer que la solution p_d admet les décompositions suivantes à l'infini (L suffisamment grand) :

$$x > L \quad p_d(x, y) = \sum_{n \geq 0} (p_d, c_n)_{\Sigma_L^+} p_n^+(x, y) e^{-i\beta_n^+ L} \quad (5)$$

$$x < -L \quad p_d(x, y) = \sum_{n \geq 0} (p_d, c_n)_{\Sigma_L^-} p_n^-(x, y) e^{i\beta_n^- L} \quad (6)$$

où on a posé : $(p_d, c_n)_{\Sigma_L^\pm} = \int_{\Sigma_L^\pm} p_d(\pm L, y) c_n(y) dy$ avec $\Sigma_L^\pm = \{x = \pm L\} \times]0, h[$.

En déduire que :

$$\frac{\partial p_d}{\partial n} \Big|_{\Sigma_L^\pm} = -T_\pm p_d,$$

où :

$$T_+ p_d := - \sum_{n \geq 0} i\beta_n^+ (p_d, c_n)_{\Sigma_L^+} c_n \quad \text{et} \quad T_- p_d := \sum_{n \geq 0} i\beta_n^- (p_d, c_n)_{\Sigma_L^-} c_n.$$

Ceci nous conduit à introduire pour p_d le problème en domaine borné suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - M^2) \frac{\partial^2 p_d}{\partial x^2} + 2ikM \frac{\partial p_d}{\partial x} + \frac{\partial^2 p_d}{\partial y^2} + k^2 p_d = 0 \quad \text{dans } \Omega_L :=]-L, +L[\times]0, h[\\ \frac{\partial p_d}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial p_d}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } y = 0, h, \\ \frac{\partial p_d}{\partial x} = -T_\pm p_d \quad \text{pour } x = \pm L. \end{array} \right. \quad (7)$$

Question 5 : Montrer que lorsque $\varphi_i = p_m^+$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_- \varphi_i &= i(\beta_m^- - \beta_m^+) e^{-i\beta_m^+ L} c_m \quad \text{sur } \Sigma_L^- \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + T_+ \varphi_i &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_L^+. \end{aligned}$$

Remarque : il est donc préférable de choisir $\varphi_i = e^{i\beta_m^+ L} p_m^+$ afin d'éviter de garder le terme exponentiel.

Question 6 : Montrer que le problème (7) a pour formulation variationnelle : $p = \varphi_i + p_d \in H^1(\Omega_L)$ telle que $\forall \psi \in H^1(\Omega_L)$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((1 - M^2) \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - 2ikM \frac{\partial p}{\partial x} \bar{\psi} - k^2 p \bar{\psi} \right) \\ & + (1 - M^2) \left(\int_{\Sigma_L^+} T^+(p) \bar{\psi} + \int_{\Sigma_L^-} T^-(p) \bar{\psi} \right) = \int_{\Sigma_L^-} g_i \bar{\psi} \end{aligned} \quad (8)$$

où l'on précisera l'expression de g_i .

3 Etude du problème variationnel (8)

Question 7 : Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\psi \in H^1(\Omega_L)$

$$\left| \int_{\Sigma_L^\pm} T^\pm(\psi) \bar{\psi} dy \right| \leq c \|\psi\|_{H^1(\Omega_L)}^2.$$

En déduire la continuité de la forme bilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle
Indication : On pourra décomposer ψ sur la base orthogonale $\cos(\frac{n\pi y}{h}) \cos(\frac{m\pi x}{2L})$, $n, m \geq 0$ de $H^1(\Omega_L)$.

On se placera pour simplifier dans un premier temps dans le cas $k = 0$.

Question 8 : Montrer que pour tout $\psi \in H^1(\Omega_L)$

$$\left| \int_{\Sigma_L^\pm} T^\pm(\psi) \bar{\psi} dy \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = 0 \text{ sur } \Sigma_L^\pm.$$

Question 9 : En déduire la coercivité de la forme bilinéaire intervenant dans la formulation variationnelle.

Indication : Utiliser un raisonnement par contradiction et utiliser le Lemme de Rellich.

Question 10 : Montrer l'existence et unicité de la solution de (8).

Question bonus (optionnelle) : Etendre ce résultat pour k suffisamment petit

En fait le résultat d'existence et d'unicité est valable pour tout k . Cependant, pour le démontrer nous aurions eu besoin de la théorie de Fredholm, qui est en dehors du programme.

4 Mise en oeuvre

On se propose d'utiliser le logiciel Free-Fem++ pour calculer numériquement la solution de (8) obtenue par une méthode d'éléments finis P_1 sur un maillage triangulaire. On note, par la suite, $(w_I)_{I=1,N}$ les fonctions de base globales associées à ce maillage et $(T_\ell)_{\ell=1,M}$ l'ensemble des triangles du maillage.

Question 11 : Montrer que l'approximation par éléments finis conduit à un système linéaire de la forme :

$$\left((1 - M^2) \mathbb{K}_x + \mathbb{K}_y - k^2 \mathbb{M} - 2ik \mathbb{M} \mathbb{D} + (1 - M^2) (\mathbb{T}^+ + \mathbb{T}^-) \right) X = B \quad (9)$$

où on donnera l'expression des différents termes en fonction des w_I .

Le calcul des matrices $\mathbb{K}_x, \mathbb{K}_y, \mathbb{M}$ et \mathbb{D} est standard. Par contre, le calcul des matrices \mathbb{T}^\pm ne l'est pas. En effet, les termes de ces matrices sont de la forme, pour \mathbb{T}_{IJ}^+ par exemple :

$$\mathbb{T}_{IJ}^+ = - \sum_{n \geq 0} i \beta_n^+ (w_I, c_n) (w_J, c_n) \quad \text{où} \quad (w_I, c_n) = \int_0^h w_I(L, y) c_n(y) dy$$

Question 12 : Quels sont les termes non nuls de \mathbb{T}^\pm ? Donner l'expression analytique de ces termes lorsque la série est tronquée après n_0 ! C'est cette expression que l'on utilisera pour le calcul numérique.

Question 13 : Test de validation dans le cas sans obstacles. En s'inspirant du traitement de \mathbb{T}^- , compléter la partie "calcul de \mathbb{T}^+ " dans le fichier de commandes `ondesguidees.edp`. Que doit-on trouver comme solution lorsque $\varphi = p_m^+$. Utiliser ce test pour valider le programme : on prendra $c = 1, L = 5, h = 2, m = 0, 1, 2$ et $\omega = 10$, puis on fera varier M entre 0 et 0.5.

- Discuter le choix du pas de discrétisation en fonction de M et de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/k$.
- Représenter la solution pour deux valeurs de M .

- *Quel est l'effet d'augmenter M ?*

Question 14 : Modifier le fichier `ondesguidees.edp` pour pouvoir prendre en compte la présence d'un obstacle.

- *Reproduire les paramètres de la question précédente et représenter pour chaque expérience le champ diffracté.*
- *Commenter les résultats obtenus (par exemple, définir ce que l'on peut appeler "zone d'ombre" et discuter sa forme en fonction de M et k).*