Ecole Polytechnique, Promotion 2004
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 25 avril 2006
Sujet proposé par G. Allaire

1 Différences finies (7 points)

On considére l'équation d'advection linéaire dans $(0,1)$ avec condition aux limites périodique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t, x+1) = u(t,x) \text{ pour } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{1}$$

avec une vitesse constante et positive $a > 0$. Pour $\Delta t > 0$ et $\Delta x = 1/N > 0$ (avec N un entier positif), on définit les noeuds d'un maillage régulier

$$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, j \in \mathbb{Z}.$$

On note u_j^n une approximation discrète au point (t_n, x_j) de la solution exacte $u(t,x)$. On pose

$$c = a\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

On considère le schéma de Beam-Warming

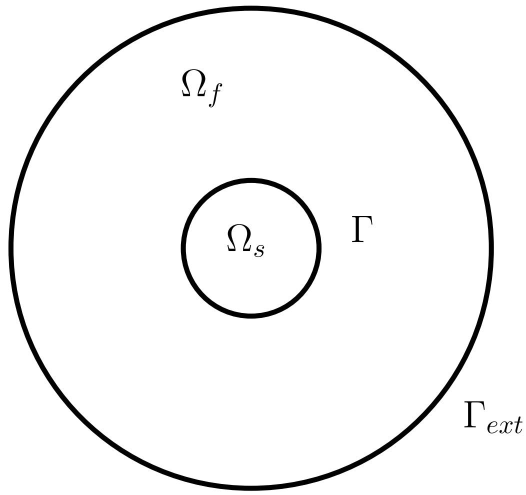
$$u_i^{n+1} = \frac{c(c-1)}{2}u_{i-2}^n + c(2-c)u_{i-1}^n + \frac{(c-1)(c-2)}{2}u_i^n$$

avec la donnée initiale $u_j^0 = u_0(x_j)$ et la condition aux limites $u_{j+N}^n = u_j^n$, $\forall j$.

1. Montrer que le schéma de Beam-Warming est consistant et (au moins) d'ordre 2.
2. Montrer que le schéma de Beam-Warming est stable L^2 sous la condition CFL $0 \leq c \leq 2$. Quel avantage de ce schéma en déduisez-vous par rapport aux schémas usuels étudiés en cours ? Que peut-on dire de sa convergence ?

2 Masse ajoutée (13 points)

On s'intéresse au mouvement d'un solide rigide dans un fluide parfait. Le but de ce problème est de montrer que la présence du fluide induit une masse apparente du solide plus grande que sa masse réelle : c'est le concept de masse ajoutée. On fait une hypothèse de petits déplacements qui permet de considérer une géométrie fixe, indépendante du temps. On note Ω_s le volume occupé par le solide (un ouvert régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^N$), Ω_f le volume occupé par le fluide (un ouvert



borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^N$ qui forme une couronne autour de Ω_s), Γ la frontière entre Ω_s et Ω_f, et Γ_{ext} le bord extérieur du domaine fluide (voir la figure, en pratique $N = 2$ ou 3).

On suppose que le solide a une masse $m > 0$ qu'il est rappelé à sa position d'équilibre par un ressort de raideur $k > 0$ et qu'il ne se déplace qu'en translation (pas de rotation) sans aucune déformation (tous les points du solide ont le même déplacement). On note $\vec{r}(t)$ sa position qui est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^N$ et qui est solution de l'équation différentielle ordinaire (loi fondamentale de la dynamique)

$$\left\{ \begin{array}{l} m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + k\vec{r} = \vec{f} + \displaystyle\int_\Gamma p\vec{n}\,ds \quad \text{ pour } t > 0, \\ \vec{r}(0) = \vec{r}^0, \ \dfrac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{r}^1, \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\vec{f}(t)$ est une force extérieure appliquée au solide, $\vec{n}$ est la normale unité à Γ orientée vers l'intérieur de Ω_s, et p est la pression exercée par le fluide sur le solide.

Le fluide étant incompressible et irrotationnel, sa vitesse $\vec{u}$ dérive d'un potentiel scalaire ϕ et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}\vec{u} = 0, \quad \vec{u} = \nabla\phi \quad \text{ dans } \Omega_f, \\ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{ sur } \Gamma_{ext}, \\ \vec{u}\cdot\vec{n} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{n} \quad \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \tag{3}$$

où on a supposé que le fluide ne peut pas sortir de Ω_f et que la composante normale de la vitesse est continue à travers Γ. La pression est alors donnée par la loi de Bernouilli

$$p = p_0 - \frac{\partial\phi}{\partial t},$$

où p_0 est une pression de référence constante. Pour éliminer la pression p dans (2) et obtenir une équation ne faisant intervenir que le déplacement $\vec{r}$, on introduit une famille de problèmes auxiliaires, pour $1 \leq k \leq N$,

$$\begin{cases} -\Delta \phi_k = 0 \quad \text{dans } \Omega_f, \\ \dfrac{\partial \phi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{ext}, \\ \dfrac{\partial \phi_k}{\partial n} = \vec{e}_k \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{4}$$

où $(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq N}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

1. Vérifier que si ϕ_k est solution de (4) alors $\phi_k + C$, où C est une constante quelconque, est aussi solution de (4). De même, vérifier que

$$\int_\Gamma \vec{e}_k \cdot \vec{n} \, ds = 0.$$

2. Pour obtenir l'unicité de la solution on introduit l'espace

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega_f) \text{ tel que } \int_{\Omega_f} v(x) \, dx = 0 \right\}.$$

   A l'aide de cet espace V, donner une formulation variationnelle de (4) dont on montrera qu'elle admet une unique solution, et préciser en quel sens on a résolu le problème aux limites (4) (on admettra que la solution de la formulation variationnelle appartient à $H^2(\Omega_f)$). Indication : on utilisera l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (5.28) dans le cours.

3. Calculer la solution $\phi(t, x)$ de (3) en fonction de la famille $(\phi_k(x))_{1 \leq k \leq N}$ et de $\frac{d\vec{r}}{dt}(t)$.

4. En déduire qu'il existe une matrice constante M de taille N, dite tenseur de masse ajoutée, telle que la solution de (2) est solution de

$$\begin{cases} (m\text{Id} + M) \dfrac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + k\vec{r} = \vec{f} \quad \text{pour } t > 0, \\ \vec{r}(0) = \vec{r}^0, \ \dfrac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{r}^1, \end{cases} \tag{5}$$

   où Id est la matrice identité.

5. Montrer que la matrice M est symétrique définie positive. Indication : utiliser la formulation variationnelle de (4).

Remarque : les questions 1-2, d'une part, et 3-4-5, d'autre part, sont indépendantes.