Ecole Polytechnique, Promotion 2007
Analyse numérique et optimisation (MAP 431)
Contrôle Hors Classement du mardi 7 avril 2009
Corrigé proposé par G. Allaire

1 Différences finies

1. On vérifie sans peine que la fonction définie, pour $(x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_*$, par

$$u(t,x) = u_0(x - at) + f(t - x/a)\,,$$

est bien solution de l'équation d'advection, de classe C^1. Cette solution est bien unique car la différence entre deux solutions, notée $w(t,x)$, vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{pour } (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+_*, \\ w(t,0) = 0 & \text{pour } t \in \mathbb{R}^+_*, \\ w(0,x) = 0 & \text{pour } x \in (0,1). \end{cases}$$

En multipliant alors cette équation par w et en intégrant par parties en espace, utilisant la condition aux limites $w(t,0) = 0$, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 w^2(t,x)\,dx + \frac{a}{2}w^2(t,1) = 0,$$

d'où l'on déduit que la fonction

$$t \;\mapsto\; \int_0^1 w^2(t,x)\,dx$$

est décroissante. Comme elle est positive et nulle à l'instant initial, elle est toujours nulle, donc $w(t,x) \equiv 0$, ce qui prouve l'unicité de la solution.

2. On utilise la relation

$$u_j^{n+1} = -u_j^n + u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2} \tag{1}$$

pour obtenir, en notant $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$,

$$(1+c)u_{j+1/2}^{n+1/2} + (1-c)u_{j-1/2}^{n+1/2} = 2u_j^n. \tag{2}$$

Ce schéma peut paraitre implicite pour calculer les inconnues au temps $t_{n+1/2}$ en fonction de celles au temps t_n (on trouve ensuite les les inconnues au temps t_{n+1} grâce à la relation (1)). Il n'en est rien car la matrice du système linéaire associé à (2) est triangulaire et on peut donc résoudre explicitement (2) en progressant dans le sens des $(j+1/2)$ croissants. On part de la condition aux limites

$$u_{1/2}^{n+1/2} = f(t_{n+1/2})$$

et on calcule de proche en proche la nouvelle valeur $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ en fonction de la précédente $u_{j-1/2}^{n+1/2}$.

3. On calcule les erreurs de troncature des deux relations du schéma

$$E_1 = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} + a\frac{u(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) - u(t_{n+1/2}, x_{j-1/2})}{\Delta x}$$

et

$$E_2 = u(t_{n+1}, x_j) + u(t_n, x_j) - u(t_{n+1/2}, x_{j+1/2}) - u(t_{n+1/2}, x_{j-1/2})$$

pour trouver, en faisant un développement de Taylor autour du point $(t_{n+1/2}, x_j)$,

$$E_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t_{n+1/2}, x_j) + \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\right)$$

et

$$E_2 = \mathcal{O}\left((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\right)$$

ce qui prouve que le schéma est consistant et d'ordre 2.

4. On multipliera la première relation du schéma par $(u_j^{n+1} + u_j^n)$ pour obtenir

$$\frac{|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2}{\Delta t} + a(u_j^{n+1} + u_j^n)\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0.$$

On utilise la deuxième relation $u_j^{n+1} + u_j^n = u_{j+1/2}^{n+1/2} + u_{j-1/2}^{n+1/2}$ pour simplifier le deuxième terme de l'égalité précédente

$$\frac{|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2}{\Delta t} + a\frac{|u_{j+1/2}^{n+1/2}|^2 - |u_{j-1/2}^{n+1/2}|^2}{\Delta x} = 0.$$

En sommant en j on obtient

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2}{\Delta t} + a\frac{|u_{N+1/2}^{n+1/2}|^2 - |u_{1/2}^{n+1/2}|^2}{\Delta x} = 0.$$

Utilisant la condition aux limites et sachant que $a > 0$ on en déduit

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta x|u_j^{n+1}|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} \Delta x|u_j^n|^2 + a\Delta t|f(t_{n+1/2})|^2,$$

qui conduit au résultat désiré par sommation en n.

L'intérêt de ce schéma (dit de Carlson) est qu'il est inconditionnellement stable **et** explicite.

2 Formulation variationnelle

1. Soit le problème aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} - \Delta u_n = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Pour obtenir une formulation variationnelle de (3) on multiplie l'équation par une fonction test v quelconque, s'annulant sur le bord $\partial\Omega$, et on intègre par parties. On obtient

$$\int_\Omega \Big(\nabla u_n \cdot \nabla v + (\Delta t)^{-1} u_n v\Big) dx = \int_\Omega (\Delta t)^{-1} u_{n-1} v \, dx. \tag{4}$$

Par ailleurs, pour que tous les termes dans (4) aient un sens on choisit $H_0^1(\Omega)$ comme espace de Hilbert. Finalement, la formulation variationnelle proposée est : trouver $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \Big(\nabla u_n \cdot \nabla v + (\Delta t)^{-1} u_n v\Big) dx = \int_\Omega (\Delta t)^{-1} u_{n-1} v \, dx \quad \forall \, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5}$$

On vérifie maintenant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 3.3.1. On définit une forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega (\Delta t)^{-1} u_{n-1} v \, dx$$

et une forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \Big(\nabla u \cdot \nabla v + (\Delta t)^{-1} u v\Big) dx$$

qui sont clairement continues par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer les intégrales. Vérifions maintenant la coercivité de la forme bilinéaire. On a

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_\Omega \Big(|\nabla v|^2 + (\Delta t)^{-1} v^2\Big) dx \\ &\geq \nu \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

avec $\nu = \min(1, (\Delta t)^{-1})$. Ainsi, il existe une unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (5).

2. Vérifions maintenant que cette solution de la formulation variationnelle est bien une solution du problème (3). Pour cela on admet que $u_n \in H^2(\Omega)$. On utilise la formule de Green (4.22) qui implique que (5) est équivalent à

$$\int_\Omega \Big(-\Delta u_n + (\Delta t)^{-1}(u_n - u_{n-1})\Big) \, v \, dx = 0. \tag{6}$$

On choisit v quelconque dans $C_c^\infty(\Omega)$ et on en déduit par application du Corollaire 4.2.2 que

$$-\Delta u_n(x) + (\Delta t)^{-1} u_n(x) = (\Delta t)^{-1} u_{n-1}(x)$$

comme fonctions de $L^2(\Omega)$, ce qui implique que cette égalité a lieu presque partout dans Ω. La condition aux limites de Dirichlet se retrouve, à cause du théorème de trace 4.3.13, puisque $u_n \in H^1_0(\Omega)$. On a donc bien retrouvé le système (3) au sens "presque partout".

3. On choisit $v = u_n$ dans la formulation variationnelle (5) et on minore le terme en gradient pour obtenir

$$\int_\Omega (\Delta t)^{-1} |u_n|^2 dx \leq \int_\Omega (\Delta t)^{-1} u_{n-1} u_n \, dx \, .$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz au membre de droite on en déduit

$$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \, ,$$

d'où le résultat par récurrence sur n.

4. On choisit $v = u_n$ dans la formulation variationnelle (5) mais, cette fois-ci, on écrit

$$(u_n - u_{n-1}) u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})^2 + \frac{1}{2}(u_n)^2 - \frac{1}{2}(u_{n-1})^2.$$

On minore le terme en $(u_n - u_{n-1})^2$ pour obtenir

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u_n|^2 dx + \Delta t \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_{n-1}|^2 dx \, .$$

En sommant par rapport à n on obtient une somme "téléscopique" qui donne

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u_n|^2 dx + \sum_{k=1}^{n} \Delta t \int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0|^2 dx \, .$$

En passant à la limite $t_n \to t$ lorque $\Delta t \to 0$, et avec l'hypothèse faite de convergence uniforme des $u_n(x)$ vers $u(t,x)$, on en déduit

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(t,x)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(s,x)|^2 dx \, ds \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx \, .$$

5. Le schéma d'Euler explicite devrait s'écrire, pour $n \geq 1$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t} - \Delta u_{n-1} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Mais la condition aux limites n'a pas de sens car, justement, u_n se calcule explicitement en fonction de u_{n-1} sans résoudre d'équation aux dérivées partielles, grâce à la formule

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \Delta u_{n-1}.$$

Ce schéma ne peut qu'être instable car on "perd" de la régularité sur u_n à chaque itération ! Plus précisément, choisissons u_0 défini, pour un nombre d'onde $k \in \mathbb{R}^N$, par

$$u_0(x) = e^{i\, k \cdot x}.$$

On montre facilement par récurrence que

$$u_n(x) = (1 - \Delta t|k|^2)^n e^{i\,k\cdot x}.$$

Aussi petit soit notre choix de Δt on peut trouver $k \in \mathbb{R}^N$ tel que $|1 - \Delta t|k|^2| > 1$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n|^2 dx = +\infty.$$

On pourrait objecter que u_0 ne vérifie pas la condition aux limites de Dirichlet dans ce contre-exemple de stabilité. Outre le fait que cela n'est pas nécessaire dans le cas du schéma implicite (et de manière générale, voir chapitre 8 du polycopié), on peut travailler un peu plus en montrant le même résultat pour $u_0(x) = e^{i\,k\cdot x}\phi(x)$ où ϕ est une fonction non nulle, de classe C^∞ à support compact. Nous laissons au lecteur courageux le soin de faire les calculs exacts...