Chapitre 3

FORMULATION VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

Exercice 3.1.1 Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{ll} -\frac{d^2u}{dx^2} = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

admet une solution unique dans $C^2([0,1])$ donnée par la formule

$$u(x) = x\int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds \text{ pour } x \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Correction. Soit u défini par (3.2). La continuité de la fonction f assure la dérivabilité de la fonction u. On a

$$u'(x) = \int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)ds,$$

d'où $-u''(x) = f$. De plus, u vérifie les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. Ainsi, u est bien solution de l'équation différentielle (3.1). Il reste à établir l'unicité de la solution de l'équation (3.1). L'équation étant linéaire, il suffit de montrer que toute solution v de l'équation (3.1) avec $f = 0$ est nulle. La dérivée seconde de v étant nulle, on en déduit que v est une fonction affine. Enfin, les conditions aux limites impliquent la nullité de la fonction v.

Exercice 3.2.1 Déduire de la formule de Green (**3.5**) la formule de Stokes

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x)\phi(x)\,dx = -\int_\Omega \sigma(x)\cdot\nabla\phi(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\cdot n(x)\,\phi(x)\,ds,$$

où ϕ est une fonction scalaire de $C^1(\overline{\Omega})$ et σ une fonction à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{\Omega})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$.

Correction.

$$\int_\Omega (\nabla\cdot\sigma(x)\phi(x)+\sigma(x)\cdot\nabla\phi(x))\,dx=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial x_i}(x)\phi(x)+\sigma_i(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right)dx$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\partial\sigma_i\phi}{\partial x_i}(x)dx=\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\sigma_i(x)\phi(x)n_i(x)ds$$

$$=\int_{\partial\Omega}\sigma(x)\cdot n(x)\phi(x)ds.$$

Exercice 3.2.2 En dimension $N=3$ on définit le rotationnel d'une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$, $\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, comme la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\mathrm{rot}\phi=\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x_3},\frac{\partial\phi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1},\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right).$$

Pour ϕ et ψ, fonctions à valeurs vectorielles de $C^1(\overline{\Omega})$, à supports bornés dans le fermé $\overline{\Omega}$, déduire de la formule de Green (**3.5**)

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\phi\cdot\psi\,dx-\int_\Omega\phi\cdot\mathrm{rot}\psi\,dx=-\int_{\partial\Omega}(\phi\times n)\cdot\psi\,ds.$$

Correction.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left(\mathrm{rot}\phi\cdot\psi-\phi\cdot\mathrm{rot}\psi\right)\,dx\\
&=\int_\Omega\Bigg[\left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}\right)\psi_1+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}\right)\psi_2+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right)\psi_3\\
&\quad-\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}\right)\phi_1-\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right)\phi_2-\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)\phi_3\Bigg]\,dx\\
&=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_1}(\phi_2\psi_3-\phi_3\psi_2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\phi_3\psi_1-\phi_1\psi_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1)\,dx\\
&=\int_{\partial\Omega}\begin{pmatrix}\phi_2\psi_3-\psi_3\psi_2\\ \phi_3\psi_1-\phi_1\psi_3\\ \phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1\end{pmatrix}\cdot n\,ds\\
&=\int_{\partial\Omega}(\phi\times\psi)\cdot n\,ds.
\end{aligned}$$

Exercice 3.2.3 On considère le Laplacien avec condition aux limites de Neumann. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ et u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{dans }\Omega\\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{sur }\partial\Omega.\end{cases}\tag{3.3}$$

si et seulement si u appartient à $C^1(\overline{\Omega})$ et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx=\int_\Omega f(x)v(x)\,dx\text{ pour toute fonction }v\in C^1(\overline{\Omega}).\tag{3.4}$$

En déduire qu'une condition nécessaire d'existence d'une solution dans $C^2(\overline{\Omega})$ de (3.3) est que $\int_\Omega f(x)dx = 0$.

Correction. Supposons que u soit solution du problème aux limites de Neumann (3.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En multipliant l'équation vérifiée par u par dans Ω par une fonction test $v \in C^1(\overline{\Omega})$, on obtient, suite à une intégration par partie que

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

Comme $\partial u/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx \text{ pour tout } v \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{3.5}$$

Réciproquement, supposons que u soit une fonction régulière vérifiant (3.5). Par intégration par partie on a

$$-\int_\Omega (\Delta u(x) - f(x))v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)ds = 0 \tag{3.6}$$

pour tout $v \in C^1(\overline{\Omega})$. On procède en deux étapes : Dans un premier temps, on applique la relation (3.6) à des fonctions tests à support compact dans Ω. Cela nous permet de "tester" l'équation vérifiée par u dans Ω et d'établir l'équation $-\Delta u = f$ dans Ω. Dans un deuxième temps, on applique (3.6) à des fonctions tests non nulles sur $\partial\Omega$, ce qui nous permet de "tester" l'équation vérifiée par u sur le bord du domaine et d'en déduire que $\partial u/\partial n = 0$ sur $\partial\Omega$. Plus précisément, pour toute fonction test v à support compact dans Ω,

$$\int_\Omega (\Delta u(x) - f(x))v(x)dx = 0.$$

On peut conclure à la nullité de $\Delta u - f$ de deux manière différentes. La première consiste à appliquer le Lemme **3.2.9** du cours. Plus simplement, $\Delta u - f$ est nulle car orthogonale à un sous espace dense de $L^2(\Omega)$. L'égalité (3.6) implique alors que $\partial u/\partial n$ est elle nulle car orthogonale (pour le produit scalaire $L^2(\partial\Omega)$) à un sous espace dense de $L^2(\partial\Omega)$, trace des fonctions $C^1(\overline{\Omega})$ sur le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω.

En choisissant la fonction $v = 1$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, on en déduit que s'il existe une solution u régulière au problème aux limites (3.3),

$$\int_\Omega f(x)\ dx = 0.$$

Exercice 3.2.4 Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On considère l'équation des plaques

$$\begin{cases} \Delta\left(\Delta u\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

On note X l'espace des fonctions v de $C^2(\overline{\Omega})$ telles que v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ s'annulent sur $\partial\Omega$. Soit u une fonction de $C^4(\overline{\Omega})$. Montrer que u est une solution du problème aux limites (3.7) si et seulement si u appartient à X et vérifie l'égalité

$$\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \text{ pour toute fonction } v \in X. \tag{3.8}$$

Correction. On procède comme pour l'exercice précèdent. Soit u une solution régulière de l'équation des plaques (3.7), pour tout $v \in X$,

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx. \tag{3.9}$$

Par intégration par partie,

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\cdot\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n}(x)v(x)ds.$$

Comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla(\Delta u)\cdot\nabla v(x)dx$$

puis par une nouvelle intégration par partie que

$$\int_\Omega \Delta(\Delta u)(x)v(x)dx = \int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \Delta u(x)\frac{\partial v}{\partial n}(x)ds.$$

Comme $\frac{\partial v}{\partial n}(x) = 0$ sur $\partial\Omega$, le dernier terme de cette équation est nulle. Ainsi, on déduit de (3.9) que

$$\int_\Omega \Delta u(x)\Delta v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

La réciproque s'établit comme lors de l'exercice précédent. Supposons que u soit une solution du problème variationnel (3.8), en effectuant deux intégrations par partie successives, on obtient

$$\int_\Omega (\Delta(\Delta u) - f)v dx = 0,$$

pour tout $v \in X$. Or X est un sous espace dense de $L^2(\Omega)$, ainsi $\Delta(\Delta u) - f = 0$.

Exercice 3.3.1 Le but de cet exercice est de montrer que l'espace V, défini par

$$V = \left\{v \in C^1(\overline{\Omega}),\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}, \tag{3.10}$$

muni du produit scalaire

$$\langle w, v \rangle = \int_\Omega \nabla w(x) \cdot \nabla v(x)\, dx, \tag{3.11}$$

n'est pas complet. Soit Ω la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^N$. Si $N = 1$, on définit la suite

$$u_n(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -1 < x < -n^{-1}, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n) & \text{si } -n^{-1} \leq x \leq n^{-1}, \\ x - 1 & \text{si } n^{-1} < x < 1. \end{cases}$$

Si $N = 2$, pour $0 < \alpha < 1/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = \left|\log\left(|\frac{x}{2}|^2 + n^{-1}\right)\right|^\alpha - |\log(4^{-1} + n^{-1})|^\alpha.$$

Si $N \geq 3$, pour $0 < \beta < (N-2)/2$, on définit la suite

$$u_n(x) = \frac{1}{(|x|^2 + n^{-1})^{\beta/2}} - \frac{1}{(1 + n^{-1})^{\beta/2}}.$$

Montrer que la suite u_n est de Cauchy dans V mais qu'elle ne converge pas dans V lorsque n tend vers l'infini.

Correction.

D'après l'inégalité de Poincaré, une suite u_n de l'espace V est de Cauchy, si et seulement si ∇u_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)^N$. L'espace $L^2(\Omega)^N$ étant complet, on en déduit que u_n est de Cauchy dans V si et seulement si ∇u_n est convergente dans $L^2(\Omega)^N$. Ainsi, si V était un espace complet, toute suite de u_n de V telle que ∇u_n converge vers un élément τ de $L^2(\Omega)^N$ serait convergente vers un élément u de V. En particulier, $\tau = \nabla u$ serait une fonction continue. Afin de prouver que V n'est pas complet, il suffit donc dans chacun des cas de vérifier que ∇u_n converge dans $L^2(\Omega)^N$ vers une fonction discontinue.

Cas $N = 1$**.** La suite ∇u_n converge dans $L^2(]-1,1[)$ vers la fonction τ définie par

$$\tau(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction τ n'ayant pas de représentant continu, V n'est pas complet.

Cas $N = 2$**.** Soit $\tau : \Omega \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie pour tout $x \neq 0$ par

$$\tau(x) = -\frac{\alpha 2^\alpha}{|x|^2}\left(-\log(|x/2|)\right)^{\alpha-1} x.$$

On vérifie sans mal que τ appartient à $L^2(\Omega)^2$. En effet,

$$\int_\Omega |\tau|^2 dx = 2\pi 2^{2\alpha}\alpha^2 \int_0^1 \frac{1}{r \log(r/2)^{2(1-\alpha)}} dr$$

et comme $2\alpha - 1 < 0$, l'intégrale est finie

$$\int_{\Omega} |\tau|^2 dx = 2^{2\alpha+1}\pi\alpha^2(1-2\alpha)^{-1} \left[\left| \log \frac{r}{2} \right|^{2\alpha-1} \right]_0^1 = \frac{2^{2\alpha+1}\pi\alpha^2}{1-2\alpha} (\log 2)^{2\alpha-1}.$$

La suite ∇u_n converge dans $L^2(\Omega)^2$ vers τ. Il suffit à cet effet, d'appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue en remarquant que $|\nabla u_n(x) - \tau(x)|$ est une suite décroissante sur un voisinage de l'origine, uniformément bornée en dehors de ce voisinage, convergeant ponctuellement vers zéro.

Comme τ n'est pas continue, V n'est pas complet.

Cas $N \geq 3$**.** On procède comme dans le cas précédent. En particulier, u_n et de Cauchy et le gradient de u_n converge dans $L^2(\Omega)^N$ vers

$$\tau = -\beta \frac{x}{|x|^{\beta+2}},$$

La fonction τ appartient bien à $L^2(\Omega)^N$, car $\int_0^1 r^{-2\beta+N-3} dr < +\infty$ dès que $\beta < (N-2)/2$, mais n'est pas continue en 0.