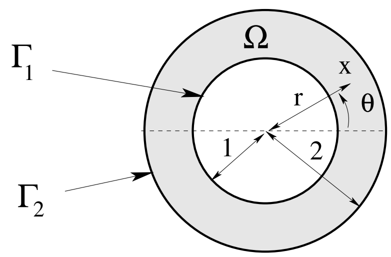
Ecole Polytechnique - Promotion 2012
Analyse Numérique et Optimisation (MAP 431)
Contrôle hors classement du 16 avril 2014
Sujet proposé par Eric Cancès

On considère les ensembles

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < |x| < 2 \right\} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = r \right\},$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. La forme de l'ouvert Ω incite à travailler en coordonnées polaires.



Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad e_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\theta}.$$

On rappelle les propriétés suivantes :

1. soit $0 < r < +\infty$. Toute fonction $g \in L^2(\Gamma_r)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série de Fourier :

$$g(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e_k(\theta) \quad \text{où} \quad g_k = \int_0^{2\pi} g(\theta) e_k(\theta)^* \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(\theta) e^{-ik\theta} \, d\theta,$$

la convergence de la série ci-dessus ayant lieu dans $L^2(\Gamma_r)$, et on a

$$\|g\|^2_{L^2(\Gamma_r)} = r \sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2;$$

2. toute fonction $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ peut se décomposer de manière unique sous la forme

$$\phi(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_k(r) e_k(\theta) \quad \text{où} \quad \phi_k(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \phi(r, \theta) e^{-ik\theta} \, d\theta, \tag{1}$$

où la série ci-dessus converge uniformément sur $\overline{\Omega}$, et on a

$$\int_0^{2\pi} |\phi(r,\theta)|^2 \, d\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\phi_k(r)|^2 \quad \text{et} \quad \|\phi\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_1^2 r \int_0^{2\pi} |\phi(r,\theta)|^2 \, d\theta \, dr = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_1^2 r |\phi_k(r)|^2 \, dr;$$

3. le gradient de ϕ au point de coordonnées polaires (r,θ) s'écrit

$$\nabla\phi(r,\theta) = \frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta)\mathbf{e}_r(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(r,\theta)\mathbf{e}_\theta(\theta),$$

   où $\mathbf{e}_r(\theta)$ et $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées cartésiennes sont respectivement $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $(-\sin\theta, \cos\theta)$;

4. le Laplacien de ϕ au point de coordonnées polaires (r,θ) est donné par

$$\Delta\phi(r,\theta) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}(r,\theta).$$

Problème 1 : différences finies (10 points)

Soit $0 < T < +\infty$, et $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière s'annulant sur les bords Γ_1 et Γ_2 de l'ouvert Ω. On considère le problème consistant à chercher une fonction régulière $u : \overline{\Omega}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad \text{dans } \Omega\times]0,T]; \\ u = u_0 \quad \text{sur } \Omega\times\{0\}\,; \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\times[0,T]. \end{cases} \tag{2}$$

Comme annoncé précédemment, on travaillera en coordonnées polaires. On considèrera que la variable (r,θ) prend ses valeurs dans $[1,2]\times\mathbb{R}$ et que la fonction $(r,\theta,t)\mapsto u(r,\theta,t)$ est C^∞ et 2π-périodique en θ. Pour $N\in\mathbb{N}^*$, $J\in\mathbb{N}^*$ et $K\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad \Delta r = \frac{1}{J+1}, \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{L}, \quad t_n = n\Delta t, \quad r_j = 1 + j\Delta r, \quad \theta_l = l\Delta\theta,$$

et on note $u^n_{j,l}$ une approximation de $u(r_j,\theta_l,t_n)$. On considère le schéma aux différences finies

$$\frac{u^{n+1}_{j,l} - u^n_{j,l}}{\Delta t} = \frac{u^n_{j+1,l} - 2u^n_{j,l} + u^n_{j-1,l}}{\Delta r^2} + \frac{u^n_{j+1,l} - u^n_{j-1,l}}{2r_j\Delta r} + \frac{u^n_{j,l+1} - 2u^n_{j,l} + u^n_{j,l-1}}{r_j^2\Delta\theta^2}. \tag{3}$$

Question 1. Ce schéma est-il implicite ou explicite ? Préciser comment prendre en compte la condition initiale, les conditions limites, et la condition de périodicité en θ.

Question 2. Ce schéma est-il consistant avec l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ et si oui, quel est son ordre ?

Question 3. Pour tout $0 \le n \le N$ et tout $1 \le j \le J$, on note u^n_j la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux et 2π-périodique définie par

$$\forall 0 \le l \le L-1, \quad \forall\theta\in[2\pi(l-1/2)\Delta\theta, 2\pi(l+1/2)\Delta\theta[, \quad u^n_j(\theta) = u^n_{j,l}.$$

On note $(\widehat{u}^n_{j,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier de la fonction u^n_j et, pour k fixé, on regroupe les coefficients de Fourier $(\widehat{u}^n_{j,k})_{1\le j\le J}$ dans un vecteur $\widehat{U}^n_k \in \mathbb{C}^J$. En récrivant le schéma (3) à l'aide des fonctions $u^n_j(\theta)$, en décomposant en séries de Fourier, et en observant que $\widehat{u^n_j(\cdot + h)}_k = e^{ikh}\,\widehat{u}^n_{j,k}$, montrer que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, il existe une matrice M_k, dont on exprimera les coefficients en fonction de Δt, Δr, $\Delta\theta$, $(r_j)_{1\le j\le J}$ et k, telle que

$$\forall 0 \le n \le N-1, \quad \widehat{U}^{n+1}_k = M_k\widehat{U}^n_k.$$

Question 4. On suppose que les paramètres Δt, Δr et $\Delta\theta$ sont choisis tels que $\|M_k\|_2 \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme matricielle sur $\mathbb{C}^{J\times J}$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^J$ (cf. poly, Définition 13.1.1). Montrer que

$$\forall 0 \leq n \leq N, \quad \sum_{j=1}^{J} \Delta r \sum_{l=0}^{L-1} \Delta\theta |u_{j,l}^n|^2 \leq \sum_{j=1}^{J} \Delta r \sum_{l=0}^{L-1} \Delta\theta |u_0(r_j,\theta_l)|^2,$$

et commenter ce résultat.

Problème 2 : espaces de Sobolev et formulations variationnelles (10 points)

On reprend les notations définies page 1 et on pose en outre

$$V = \left\{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_1} = 0\right\},$$

où $u|_{\Gamma_1}$ est la trace de la fonction u sur Γ_1.

Question 1. Soit $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Montrer que

$$\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_1^2 \left(r|\phi_k'(r)|^2 + k^2 r^{-1}|\phi_k(r)|^2\right) dr,$$

où les fonctions ϕ_k sont définies par (1).

Question 2. Soit $f \in C^1([1,2],\mathbb{C})$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que

$$\forall r \in [1,2], \quad |f(r)| \leq \left(\int_1^2 |f'(t)|^2\, dt\right)^{1/2},$$

puis que

$$\int_1^2 r|f(r)|^2\, dr \leq \frac{3}{2}\int_1^2 r|f'(r)|^2\, dr.$$

En déduire qu'il existe une constante $C_\Omega \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$,

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}.$$

En admettant que $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap V$ est dense dans V (muni de la norme $H^1(\Omega)$), montrer que

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Question 3. On considère le problème aux limites consistant à

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chercher } u \in V \text{ tel que} \\ -\Delta u = 0 \text{ au sens faible dans } \Omega \text{ et } u = 1 \text{ sur } \Gamma_2. \end{array}\right. \tag{4}$$

Montrer que $u_0(r,\theta) = \ln(r)/\ln(2)$ est l'unique solution de (4).

Question 4. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème variationnel consistant à

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chercher } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_2} uv = \int_\Omega fv. \end{array}\right. \tag{5}$$

Montrer que le problème (5) est bien posé. Quel est le problème aux limites vérifié par la solution u de ce problème ?

Question 5. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha(r,\theta) = (\alpha r + 1)\sin^2(\theta)$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre α, le problème variationnel consistant à

$$\left\{\begin{array}{l} \text{chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f_\alpha v, \end{array}\right. \tag{6}$$

a-t-il au moins une solution ? Cette solution est-elle unique ?