

Proposition de corrigé du devoir maison MAP 431, 2011

Jean-Marie Mirebeau

13 avril 2011

Exercice I

Question 1

Détail des schémas. Schéma explicite :

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\Delta x^2},$$

en d'autres termes, en notant

$$\lambda := \Delta t / \Delta x^2, \quad (1)$$

$$u_k^{n+1} = \lambda u_{k-1}^n + (1 - 2\lambda)u_k^n + \lambda u_{k+1}^n. \quad (2)$$

On sait d'après le cours que ce schéma est d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Il est stable dans L^2 sous condition CFL $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Schéma de Crank-Nicolson :

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\Delta x^2} \right),$$

soit en définissant de nouveau (1)

$$-\frac{\lambda}{2}u_{k-1}^{n+1} + (1 + \lambda)u_k^{n+1} - \frac{\lambda}{2}u_{k+1}^{n+1} = \frac{\lambda}{2}u_{k-1}^n + (1 - \lambda)u_k^n + \frac{\lambda}{2}u_{k+1}^n. \quad (3)$$

Ce schéma est d'ordre 2 en temps et 2 en espace. Il est inconditionnellement stable dans L^2 .

Question 2

Ordre des schémas. Supposons que $u_k^n = u(n\Delta t, k\Delta x)$, où u est une fonction régulière. Notons dans ce paragraphe

$$u_{v_1, \dots, v_k} := \frac{\partial^k u}{\partial v_1 \dots \partial v_k}(n\Delta t, k\Delta x),$$

où v_i désigne la variable temporelle t ou spatiale x . Considérons le développement limité

$$\begin{aligned} u_{k+r}^{n+m} &= u + mu_t \Delta t + ru_x \Delta x + \frac{m^2 u_{tt} \Delta t^2 + 2mru_{tx} \Delta t \Delta x + r^2 u_{xx} \Delta x^2}{2} \\ &+ \frac{3mr^2 u_{txx} \Delta t \Delta x^2 + r^3 u_{xxx} \Delta x^3}{6} + \frac{r^4 u_{xxxx} \Delta x^4}{24} \\ &+ o(\Delta t^2 + \Delta x^4), \end{aligned}$$

où $r \in \{-1, 0, 1\}$ et $m \in \{0, 1\}$, et injectons-le dans la relation de récurrence (10). Nous obtenons

$$\begin{aligned} &(a_0 + 2a_1)u + (a_0 + 2a_1)u_t \Delta t + \frac{a_0 + 2a_1}{2} u_{tt} \Delta t^2 + a_1 u_{xx} \Delta x^2 \\ &+ a_1 u_{txx} \Delta t \Delta x^2 + \frac{a_1}{12} u_{xxxx} \Delta x^4 \\ &- \left((b_0 + 2b_1)u + b_1 u_{xx} \Delta x^2 + \frac{b_1}{12} u_{xxxx} \Delta x^4 \right) \\ &+ o(\Delta t^2 + \Delta x^4), \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} &((a_0 + 2a_1) - (b_0 + 2b_1))u \\ &+ (a_0 + 2a_1)u_t \Delta t + (a_1 - b_1)u_{xx} \Delta x^2 \\ &+ \left(\frac{a_0 + 2a_1}{2} u_{tt} \Delta t^2 + a_1 u_{txx} \Delta t \Delta x^2 + \frac{a_1 - b_1}{12} u_{xxxx} \Delta x^4 \right) \\ &+ o(\Delta t^2 + \Delta x^4). \end{aligned}$$

Pour calculer l'ordre des schémas, on suppose fixé le réel $\lambda = \Delta t / \Delta x^2$, et l'on injecte les coefficients des schémas obtenus dans (2) et (3). Nous supposons aussi que u vérifie l'équation de la chaleur, de sorte que

$$u_t = u_{xx} \text{ et } u_{tt} = u_{txx} = u_{xxxx}.$$

Nous obtenons

$$((a_0 + 2a_1) - (b_0 + 2b_1)) u \tag{4}$$

$$+ ((a_0 + 2a_1)\lambda + (a_1 - b_1)) u_{xx} \Delta x^2 \tag{5}$$

$$+ \left(\frac{a_0 + 2a_1}{2} \lambda^2 + a_1 \lambda + \frac{a_1 - b_1}{12} \right) u_{xxxx} \Delta x^4 \tag{6}$$

$$+ o(\Delta x^4). \tag{7}$$

L'ordre minimal de consistance $o(\Delta t + \Delta x^2)$ est réalisé par un schéma si et seulement si les termes (4) et (5) sont nuls, ce qui correspond aux égalités annoncées :

$$a_0 + 2a_1 = b_0 + 2b_1, \tag{8}$$

$$(a_0 + 2a_1)\lambda + (a_1 - b_1) = 0. \tag{9}$$

On ne modifie pas un schéma si l'on multiplie tous ses coefficients par une constante fixée. On peut supposer que $a_0 + 2a_1$ est non nul, car autrement nous obtenons $a_1 = b_1$ en utilisant (9), puis $a_0 = b_0$, en utilisant (8) ce qui montre que le schéma est l'identité : $u_k^n = u_k^0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \geq 0$ (cas exclu).

Ainsi $a_0 + 2a_1 \neq 0$, et en divisant tous les coefficients par cette quantité nous obtenons un schéma équivalent qui vérifie $a_0 + 2a_1 = b_0 + 2b_1 = 1$.

Le schéma se réécrit alors

$$\forall k, n \geq 0, u_k^{n+1} + a_1(u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}) = u_k^n + b_1(u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n)$$

soit

$$\forall k, n \geq 0, \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = -\frac{a_1}{\lambda} \frac{u_{k-1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{b_1}{\lambda} \frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{\Delta x^2}$$

qui est le θ -schéma avec $\theta = -\frac{a_1}{\lambda}$ (et $1 - \theta = \frac{b_1}{\lambda}$ d'après (9)).

Question 3

Stabilité en norme L^2 . Nous étudions la stabilité par l'intermédiaire de l'isométrie d'espaces de Hilbert

$$L^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2([0, 1]) : (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto U(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \exp(2\pi i k \xi).$$

Pour chaque $n \geq 0$ fixé, notons $U_n \in L^2([0, 1])$ la fonction associée à la suite $(u_k^n)_{k \in \mathbb{Z}}$. La relation

$$a_1 u_{k-1}^{n+1} + a_0 u_k^{n+1} + a_1 u_{k+1}^{n+1} = b_1 u_{k-1}^n + b_0 u_k^n + b_1 u_{k+1}^n \quad (10)$$

se traduit par

$$(a_0 + 2a_1 \cos(2\pi\xi))U_{n+1}(\xi) = (b_0 + 2b_1 \cos(2\pi\xi))U_n(\xi).$$

Le coefficient d'amplification est donc

$$g(\xi) := \frac{b_0 + 2b_1 \cos(2\pi\xi)}{a_0 + 2a_1 \cos(2\pi\xi)}. \quad (11)$$

Le schéma est stable en norme L^2 si et seulement si $|g(\xi)| \leq 1$ pour tout $\xi \in [0, 1]$, en d'autres termes si

$$|a_0 + 2a_1 \cos(2\pi\xi)| \geq |b_0 + 2b_1 \cos(2\pi\xi)|. \quad (12)$$

Remarquons d'abord les identités suivantes :

$$a_0 + 2a_1 \cos(2\pi\xi) = 1 - 2a_1(1 - \cos(2\pi\xi)), \quad (13)$$

$$(a_0 + 2a_1 \cos(2\pi\xi)) - (b_0 + 2b_1 \cos(2\pi\xi)) = 2(b_1 - a_1)(1 - \cos(2\pi\xi)), \quad (14)$$

$$(a_0 + 2a_1 \cos(2\pi\xi)) + (b_0 + 2b_1 \cos(2\pi\xi)) = 2 - 2(a_1 + b_1)(1 - \cos(2\pi\xi)). \quad (15)$$

Si $a_1 < 1/4$, $b_1 \geq a_1$ et $a_1 + b_1 \leq 1/2$, alors les trois termes ci-dessus sont positifs pour tout ξ , ce qui implique immédiatement que $|g(\xi)| \leq 1$ pour tout ξ .

Réciproquement, supposons que $|g(\xi)| \leq 1$ pour tout ξ . Supposons par l'absurde que $a_1 \geq 1/4$, et donc que le dénominateur de $g(\xi)$ dans (11) s'annule pour certaines valeurs de ξ . Deux cas sont possibles : soit $g(\xi)$ prend des valeurs non bornées, ce qui est exclu par hypothèse, soit le numérateur s'annule pour les mêmes valeurs de ξ . En combinant ce point avec l'hypothèse $a_0 + 2a_1 = b_0 + 2b_1 = 1$, nous obtenons que les paires (a_0, a_1) et (b_0, b_1) sont identiques, ce qui contredit l'hypothèse $(a_0 + 2a_1)\lambda + (a_1 - b_1) = 0$. Il faut donc que $a_1 < 1/4$, et ainsi (13) est positif.

L'inégalité $|g(\xi)| \leq 1$ pour tout ξ implique alors que les quantités (14) et (15) sont positives pour tout ξ , ce qui donne $b_1 \geq a_1$ et $a_1 + b_1 \leq 1/2$ en choisissant $\xi = 1/2$.

Question 4

Définissons pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ le réel $u_k^{n+1/2}$ par

$$u_k^{n+1/2} := a_1 u_{k-1}^{n+1} + a_0 u_k^{n+1} + a_1 u_{k+1}^{n+1} = b_1 u_{k-1}^n + b_0 u_k^n + b_1 u_{k+1}^n.$$

Si $b_0 \geq 0$ et $b_1 \geq 0$ alors

$$u_k^{n+1/2} \leq (b_0 + 2b_1) \max\{u_{k-1}^n, u_k^n, u_{k+1}^n\} = \max\{u_{k-1}^n, u_k^n, u_{k+1}^n\}.$$

Si $a_1 = 0$ alors $u_k^{n+1} = u_k^{n+1/2}$, donc le schéma vérifie le principe du maximum $\sup_{k \in \mathbb{Z}} u_k^{n+1} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} u_k^n$ ce qui conclut la question.

Nous supposons désormais $a_1 < 0$, et nous introduisons le polynôme

$$P(x) := a_1 + a_0 x + a_1 x^2.$$

Comme $a_1 = P(0) < 0 < P(1) = 1$, ce polynôme admet une racine $\alpha \in]0, 1[$. Comme $x^2 P(1/x) = P(x)$ pour tout $x \neq 0$, l'inverse $1/\alpha$ est également racine de P . Nous affirmons que pour tout $n \geq 0$ et tout $k \in \mathbb{Z}$

$$u_k^{n+1} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \sum_{r \in \mathbb{Z}} u_{k+r}^{n+1/2} \alpha^{|r|}. \quad (16)$$

Cette somme converge car $0 < \alpha < 1$ et car la suite $(u_k^{n+1/2})_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée d'après les arguments ci-dessus (en supposant $(u_k^n)_{k \in \mathbb{Z}}$ bornée). Avant de prouver cette égalité, remarquons qu'elle permet de conclure immédiatement la question :

$$u_k^{n+1} \leq \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \alpha^{|r|} \right) \max_{r \in \mathbb{Z}} u_{k+r}^{n+1/2} = \underbrace{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \left(1 + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \right)}_{=1} \max_{r \in \mathbb{Z}} u_r^{n+1/2} \leq \max_{r \in \mathbb{Z}} u_r^n.$$

Pour montrer l'égalité (16), nous notons v_k^n le membre de droite de (16), et nous

observons que

$$\begin{aligned}
& \frac{1+\alpha}{1-\alpha} (a_1 v_{k-1}^n + a_0 v_k^n + a_1 v_{k+1}^n) \\
&= \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left(a_1 u_{k-1+r}^{n+1/2} + a_0 u_{k+r}^{n+1/2} + a_1 u_{k+1+r}^{n+1/2} \right) \alpha^{|r|} \\
&= \underbrace{(\alpha a_1 + a_0 + \alpha^{-1} a_1)}_{=0} \sum_{r < 0} u_{k+r}^{n+1/2} \alpha^{|r|} + (\alpha a_1 + a_0 + \alpha a_1) u_k^{n+1/2} + \underbrace{(\alpha^{-1} a_1 + a_0 + \alpha a_1)}_{=0} \sum_{r > 0} u_{k+r}^{n+1/2} \alpha^{|r|} \\
&= (a_0 + 2\alpha a_1) u_k^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$(1-\alpha)(a_0+2\alpha a_1) = (1-\alpha)a_0+2\alpha a_1-2\alpha^2 a_1 = (1-\alpha)a_0+2\alpha a_1+2(a_1+\alpha a_0) = (a_0+2a_1)(1+\alpha),$$

donc $a_0 + 2\alpha a_1 = (1 + \alpha)/(1 - \alpha)$. La suite $(v_k^n)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifie donc l'équation $a_1 v_{k-1}^n + a_0 v_k^n + a_1 v_{k+1}^n = u_k^{n+1/2}$, qui définit la suite u_k^{n+1} . Donc $u_k^{n+1} = v_k^n$ ce qui établit (16) et conclut cette question.

Remarquons que le schéma explicite est L^∞ -stable si $\lambda := \Delta t / \Delta x^2 \leq 1/2$, et le schéma de Crank-Nicolson si $\lambda \leq 1$.

Question 5

Pour obtenir un schéma d'ordre 2 en temps et 4 en espace (au moins), il faut résoudre le système linéaire $a_0 + 2a_1 = 1$, $b_0 + 2b_1 = 1$, $(a_0 + 2a_1)\lambda + a_1 - b_1 = 0$, $(a_0 + 2a_1)\lambda^2/2 + a_1\lambda + (a_1 - b_1)/12 = 0$, où $\lambda := \Delta t / \Delta x^2$.

Nous obtenons

$$a_0 = \frac{5}{6} + \lambda, \quad a_1 = \frac{1}{12} - \frac{\lambda}{2}, \quad b_0 = \frac{5}{6} - \lambda, \quad b_1 = \frac{1}{12} + \frac{\lambda}{2}.$$

Les inégalités $a_1 \leq 1/4$, $b_1 \geq a_1$, $a_1 + b_1 \leq 1/2$ sont automatiquement vérifiées, donc le schéma est stable en norme L^2 , sans condition CFL.

Les inégalités $b_0 \geq 0$, $b_1 \geq 0$, $a_0 \geq 0$ et $a_1 \leq 0$ sont vérifiées si $1/6 \leq \lambda = \Delta t / \Delta x^2 \leq 5/6$. Ce schéma est donc L^∞ -stable sous ces conditions. Comme il est consistant, par le théorème de Lax, il est convergent pour les normes respectives (L^2 et L^∞) sous les conditions de stabilité respectives.

Ce schéma n'est pas explicite, mais il offre les mêmes difficultés de résolution que le schéma de Crank-Nicolson (résolution d'un système linéaire) pour une précision bien supérieure.

Question 6

Nous obtenons, dans les conditions de l'énoncé :

	schéma explicite	Crank-Nicolson	ordre élevé
Erreur L^2	7.2×10^{-6}	5.2×10^{-6}	3.2×10^{-9}
Erreur L^∞	9.8×10^{-6}	7.0×10^{-6}	4.3×10^{-9}

Convention pour l'erreur L^2 : la fonction approchée étant définie aux 19 points $1/20, 2/20, \dots, 19/20$, on a posé :

$$\text{Erreur } L^2 = \sqrt{\frac{1}{19} \sum_{1 \leq i \leq 19} (u_{\text{exacte}}(i/20) - u_{\text{approx}}(i/20))^2}$$

Exercice II

Question 1

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u \in L^2(\Omega)$, $u_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$ par restriction, et $u_\Gamma = 0$. Ainsi $H_0^1(\Omega) \subset H_0$.

Par contre $u := \chi_{\Omega_1}$, la fonction caractéristique de Ω_1 , appartient à H_0 mais pas à $H_0^1(\Omega)$. En effet sa trace n'est pas la même de chaque côté de la frontière Σ : la trace intérieure vaut identiquement 1, et la trace extérieure 0.

Question 2

Lemme 1. Soit $U \in H_0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $U \in H_0^1(\Omega)$.
2. $[U]_\Sigma = 0$.

Démonstration. L'implication $1 \Rightarrow 2$ est évidente, car la trace de U de chaque côté de Ω est identique.

Implication $2 \Rightarrow 1$: Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} U \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= \int_{\Omega_1} U_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \int_{\Omega_2} U_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= - \int_{\Omega_1} \phi \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \int_{\Omega_2} \phi \frac{\partial U_2}{\partial x_i} + \int_{\partial \Omega_1} [U] \phi n_i \end{aligned}$$

par utilisation de la formule de Green. Ce dernier terme étant nul par hypothèse, on a

$$\int_{\Omega} U \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} \phi W_i$$

où $W_i = \frac{\partial U_1}{\partial x_i} \chi_{\Omega_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_i} \chi_{\Omega_2}$ (on a noté χ_{Ω_i} la fonction caractéristique de Ω_i). Comme $W_i \in L^2(\Omega)$, on en déduit que U a des dérivée faible dans L^2 dans toutes les directions, c'est-à-dire que $U \in H^1(\Omega)$. Enfin, puisque par hypothèse $U \in H_0$, on a que $U \in H_0 \cap H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. \square

Considérons maintenant $u, \bar{u} \in H_0$ telles que $[u] = [\bar{u}] = f \in L^2(\Sigma)$. Leur différence $U := u - \bar{u}$ appartient à l'espace vectoriel H_0 , et satisfait $[U]_\Sigma = [u]_\Sigma - [\bar{u}]_\Sigma = 0$. Comme nous l'avons vu plus haut, ceci implique que $U \in H_0^1(\Omega)$, en d'autres termes $u \in \bar{u} + H_0^1(\Omega)$.

Nous étudions le problème suivant : trouver $u \in \bar{u} + H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_2} \nabla u \cdot \nabla v = 0. \quad (17)$$

Ecrivons la fonction $u \in \bar{u} + H_0^1(\Omega)$ sous la forme $u = \bar{u} + w$. On peut reformuler le problème ci-dessus comme suit : trouver $w \in H_0^1(\Omega)$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega_1} (\nabla \bar{u} + \nabla w) \cdot \nabla v + \int_{\Omega_2} (\nabla \bar{u} + \nabla w) \cdot \nabla v = 0,$$

soit encore

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v = - \int_{\Omega_1} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v - \int_{\Omega_2} \nabla \bar{u} \cdot \nabla v.$$

Le membre de gauche définit une forme bilinéaire coercive $A(w, v)$ sur $H_0^1(\Omega)$, tandis que le membre de droite définit une forme linéaire continue $L(v)$. Le théorème de Lax-Milgram s'applique et garantit que le problème (17) possède une unique solution.

Supposons que la solution u de (17) vérifie $u_i := u|_{\Omega_i} \in C^2(\bar{\Omega}_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Les fonctions $\partial u_{\Omega_i} / \partial n := \nabla u_i \cdot n$ sont donc bien définies sur l'interface Γ , pour $i \in \{1, 2\}$, ainsi que le saut

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Sigma} := (\nabla u_2 - \nabla u_1) \cdot n.$$

Pour toute fonction test φ , à support compact dans Ω et C^∞ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(\varphi \nabla u) + \int_{\Omega_2} \operatorname{div}(\varphi \nabla u) &= \int_{\Sigma} \varphi \nabla u_1 \cdot n + \int_{\Sigma} \varphi \nabla u_2 \cdot (-n) \\ &= \int_{\Omega_1} (\nabla \varphi \cdot \nabla u + \varphi \Delta u) + \int_{\Omega_2} (\nabla \varphi \cdot \nabla u + \varphi \Delta u). \end{aligned} \quad (18)$$

Ainsi, en utilisant (6),

$$\int_{\Omega_1} \varphi \Delta u + \int_{\Omega_2} \varphi \Delta u + \int_{\Sigma} \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0.$$

En choisissant des fonctions test dont le support ne rencontre pas Σ , nous obtenons que $\Delta u = 0$ identiquement sur Ω_1 et sur Ω_2 . Il s'ensuit que $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Sigma} = 0$ identiquement sur Σ .

Question 3

Proposons le problème variationnel suivant : trouver $u \in \bar{u} + H_0^1(\Omega)$, tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega_2} \nabla u \cdot \nabla v = - \int_{\Sigma} g v. \quad (19)$$

(De nouveau, \bar{u} désigne un élément de H_0 satisfaisant $[\bar{u}]_{\Sigma} = f$.) Comme le membre de droite est une forme linéaire continue $L(v)$ sur $H_0^1(\Omega)$, le raisonnement mené pour la Question 2 montre que le problème variationnel (19), comme (17) étudié précédemment, possède une unique solution.

Question 4

Supposons que la solution u de (19) satisfait $u_{\Omega_i} \in C^2(\Omega_i)$. En injectant (19) dans (18) nous obtenons pour toute fonction test φ à support compact dans Ω et C^∞ ,

$$\int_{\Omega_1} \varphi \Delta u + \int_{\Omega_2} \varphi \Delta u + \int_{\Sigma} \varphi \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \varphi g.$$

En choisissant des fonctions test dont le support ne rencontre pas Σ , nous obtenons que $\Delta u = 0$ identiquement sur Ω_1 et sur Ω_2 . Il s'ensuit que $\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\Sigma} = g$ identiquement sur Σ .