Ecole Polytechnique, Promotion 2017
Approximation numérique et optimisation (MAP 411)
Deuxième devoir du lundi 22 octobre 2018
Corrigé proposé par G. Allaire

Sur un segment de longueur $L > 0$, on étudie l'équation de convection-diffusion suivante

$$\begin{cases} Vu'(x) - \nu u''(x) = f(x) & \text{pour } x \in (0, L) \\ u(0) = 0 \text{ et } u'(L) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $V > 0$ est une vitesse constante, $\nu > 0$ est le coefficient de diffusion et $f(x)$ est un terme source (une fonction continue). On introduit l'espace suivant

$$V = \left\{ \phi \in C^1[0, L] \text{ tel que } \phi(0) = 0 \right\}.$$

1. Pour obtenir une formulation variationnelle pour (1), on multiplie cette équation par une fonction test $\phi \in V$ et on intègre par parties le terme de dérivée seconde

$$\int_0^L Vu'(x)\phi(x)\,dx + \nu \int_0^L u'(x)\phi'(x)\,dx - \nu u'(L)\phi(L) + \nu u'(0)\phi(0) = \int_0^L Vf(x)\phi(x)\,dx\,.$$

Or, $\phi(0) = 0$ et $u'(L) = 0$, donc on obtient le problème variationnel

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall\, v \in V, \tag{2}$$

avec

$$a(u, \phi) = \int_0^L Vu'(x)\phi(x)\,dx + \nu \int_0^L u'(x)\phi'(x)\,dx$$

et

$$L(\phi) = \int_0^L Vf(x)\phi(x)\,dx.$$

On vérifie que $a(u, v)$ et $L(v)$ sont bien définis pour des fonctions appartenant à V (en particulier, il suffit que ces fonctions soient une seule fois dérivables). Notons qu'on aurait aussi pu intégrer par parties le terme de convection et dans ce cas on aurait trouvé

$$a(u, \phi) = Vu(L)\phi(L) - \int_0^L Vu(x)\phi'(x)\,dx + \nu \int_0^L u'(x)\phi'(x)\,dx$$

mais cela n'est pas nécessaire.

2. On suppose que $u \in C^2[0, L]$. On vient de montrer que si u est solution de (1), alors c'est aussi une solution de (2). Il faut donc démontrer l'implication inverse. Soit u solution de (2). Après intégration par parties on obtient

$$\int_0^L Vu'(x)\phi(x)\,dx - \nu \int_0^L u''(x)\phi(x)\,dx + \nu u'(L)\phi(L) = \int_0^L Vf(x)\phi(x)\,dx\,,$$

car $\phi(0) = 0$ puisque $\phi \in V$. On choisit d'abord ϕ à support compact dans $(0, L)$, ce qui élimine le terme de bord au point L. Alors, du Lemme 3.1.7 du cours on déduit que

$$Vu'(x) - \nu u''(x) = f(x) \quad \text{ pour } x \in (0, L).$$

Si on reporte cette égalité dans la formule intégrale ci-dessus, on obtient

$$\nu u'(L)\phi(L) = 0 \quad \forall\, \phi \in V,$$

c'est-à-dire que $u'(L) = 0$. Par ailleurs, comme $u \in V$, on a aussi $u(0) = 0$. Autrement dit, u est solution de (1).

3. Soit un entier $n \geq 1$. Pour $h = L/n$ on définit un maillage $x_j = jh$, $0 \leq j \leq n$. On introduit l'espace discret V_h, de dimension n, engendré par la base $\phi_j(x) = \phi(\frac{x - x_j}{h})$, pour $1 \leq j \leq n$, où ϕ est la fonction chapeau définie par $\phi(x) = \max(0, 1 - |x|)$.

On remarque qu'il n'y a pas de fonction de base en x_0 puisqu'on impose que $v(0) = 0$ pour tout $v \in V$. De plus, chaque fonction de base ϕ_j a un support compact réduit à (x_{j-1}, x_{j+1}). Par conséquent, pour tout $v_h \in V_h$, on a $v_h(0) = 0$. Par contre, la valeur de $v_h(L)$ est quelconque et correspond au coefficient de ϕ_n dans la décomposition de v_h sur la base des ϕ_j.

4. On introduit l'approximation variationnelle suivante

$$\text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{3}$$

On décompose u_h sur la base de V_h

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} U_j \phi_j(x)$$

et on prend la fonction test $v_h = \phi_i$ pour déduire de (3)

$$\sum_{j=1}^{n} U_j a(\phi_j, \phi_i) = L(\phi_i).$$

Autrement dit,

$$\mathcal{K}U = b \quad \text{ avec } b_i = L(\phi_i)\ 1 \leq i \leq n, \text{ et } \mathcal{K} = (a(\phi_j, \phi_i))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

5. Pour vérifier la coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ on calcule, pour $v \in V$,

$$a(v, v) = \int_0^L V v'(x) v(x)\, dx + \nu \int_0^L v'(x) v'(x)\, dx$$

$$= \int_0^L \frac{V}{2} \left(v^2(x)\right)'\, dx + \nu \int_0^L |v'(x)|^2\, dx = \frac{V}{2} v^2(L) + \nu \int_0^L |v'(x)|^2\, dx$$

car $v(0) = 0$. Comme $V > 0$, on en déduit

$$a(v, v) \geq \nu \|v\|^2 \quad \text{avec} \quad \|v\|^2 = \int_0^L |v'(x)|^2 \, dx.$$

Il est facile de vérifier que $\|.\|$ est une norme sur V. Donc la forme bilinéaire $a(u, v)$ est coercive.

Le même calcul montre que, pour $w_h \in V_h$, de coordonnées $W \in \mathbb{R}^n$ dans la base ϕ_j,

$$a(w_h, w_h) \geq \nu \|w_h\|^2 \geq C\|W\|^2$$

pour une constante $C > 0$ car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie. Comme $a(w_h, w_h) = \mathcal{K}W \cdot W$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\mathcal{K} = \{0\}$ et donc que la matrice de rigidité est inversible.

6. On va décomposer la matrice de rigidité en deux matrices $\mathcal{K} = \mathcal{K}^c + \mathcal{K}^d$ avec

$$\mathcal{K}^c_{ij} = \int_0^L V \phi_j'(x) \phi_i(x) \, dx$$

et

$$\mathcal{K}^d_{ij} = \nu \int_0^L \phi_j'(x) \phi_i'(x) \, dx.$$

Le calcul de $\mathcal{K}^d$ a déjà été vu en cours (sauf que les conditions aux limites ne sont pas les mêmes aux deux extrémités) et on ne le détaille pas ici

$$\mathcal{K}^d = h^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La dernière ligne de $\mathcal{K}^d$ est différente des précédentes, au sens où son élément sur la diagonale est 1 au lieu de 2, car le support de ϕ_n dans $(0, L)$ est deux fois plus petit que les supports des autres fonctions de base.

Le calcul de $\mathcal{K}^c$ est nouveau et on l'explique un peu plus. Bien sûr, pour $|i-j| > 1$, comme leurs supports sont disjoints, on a

$$\int_0^L V \phi_j'(x) \phi_i(x) \, dx = 0.$$

Par ailleurs, un calcul similaire à celui de la question 5 montre que

$$\int_0^L V \phi_i'(x) \phi_i(x) \, dx = \frac{V}{2} \Big(\phi_i^2(L) - \phi_i^2(0) \Big),$$

ce qui donne

$$\mathcal{K}^c_{ii} = 0 \ \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1 \ \text{ et } \mathcal{K}^c_{nn} = \frac{V}{2}.$$

D'autre part,

$$\int_0^L V\phi_i'(x)\phi_{i+1}(x)\,dx = -\frac{V}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}(x)\,dx = -\frac{V}{2}$$

et de manière similaire

$$\int_0^L V\phi_i'(x)\phi_{i-1}(x)\,dx = \frac{V}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}(x)\,dx = \frac{V}{2}.$$

Au final on obtient

$$\mathcal{K}^c = \frac{V}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Quand $\nu = 0$, on a $\mathcal{K} = \mathcal{K}^c$ et on peut résoudre explicitement le système linéaire $\mathcal{K}^c U = b$. En effet, la première ligne du système linéaire donne la deuxième composante de la solution

$$U_2 = 2b_1/V.$$

Ensuite, toutes les lignes impaires $2k+1$, pour $2k+1 < n$, permettent progressivement de calculer les composantes paires

$$U_{2k+2} = 2b_{2k+1}/V + U_{2k} = \frac{2}{V}\sum_{i=1}^{k+1} b_{2i-1}.$$

Par ailleurs, toutes les lignes paires $2k$, pour $2k < n$, permettent progressivement de calculer les composantes impaires en fonction de U_1

$$U_{2k+1} = 2b_{2k}/V + U_{2k-1} = U_1 + \frac{2}{V}\sum_{i=1}^{k} b_{2i}.$$

C'est la dernière ligne n qui permet de calculer U_1. Si $n = 2m$ est pair, alors

$$U_{2m} = U_{2m-1} + 2b_{2m}/V$$

et donc U_1 est défini par

$$\frac{2}{V}\sum_{i=1}^{m} b_{2i-1} = U_1 + \frac{2}{V}\sum_{i=1}^{m} b_{2i}.$$

Si au contraire $n = 2m+1$ est impair, alors

$$U_{2m+1} = U_{2m} + 2b_{2m+1}/V$$

et donc U_1 est défini par

$$U_1 + \frac{2}{V} \sum_{i=1}^{m} b_{2i} = \frac{2}{V} \sum_{i=1}^{m+1} b_{2i-1}.$$

On a donc trouvé la solution unique de $\mathcal{K}^c U = b$.

Rappelons que

$$b_i = \int_0^L f(x)\phi_i(x)\,dx.$$

Par conséquent, chacune des sommes $2\sum_{i=1}^{m} b_{2i}$ et $2\sum_{i=1}^{m+1} b_{2i-1}$ est une approximation numérique de $\int_0^L f(x)\,dx$ et on voit que $U_1 = \mathcal{O}(h)$. Ainsi, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a

$$U_i = \frac{1}{V} \int_0^{x_i} f(x)\,dx + \mathcal{O}(h).$$

Par ailleurs la solution exacte de (1) lorsque $\nu = 0$ est

$$u(x) = \frac{1}{V} \int_0^{x} f(s)\,ds\,.$$

Remarquons que cette solution vérifie bien la première condition aux limites $u(0) = 0$ mais pas nécessairement la deuxième. En fait, il n'est pas possible d'imposer deux conditions aux limites pour cette équation différentielle du premier ordre. On ne conserve que la condition aux limites qui a un sens physique, c'est-à-dire celle qui est en amont par rapport à la vitesse, autrement dit, puisque $V > 0$, $u(0) = 0$.

En tout état de cause, on conclut que, lorsque $\nu = 0$, la méthode des éléments finis pour résoudre (1) converge puisque la solution discrète U_j est bien une approximation de la solution exacte.