

L'épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème qui sont indépendants. Les deux parties du problème sont aussi indépendantes.

Exercice : Optimisation (6 points)

Soit V et K deux sous-ensembles de \mathbb{R}^2 définis par $V =]0, +\infty[^2$ et $K = \{(x, y) \in V \text{ tel que } xy \geq 1\}$. Soit J la fonction définie par

$$J : \begin{array}{l} V \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \cosh(x + 8y) \end{array} .$$

Rappel : La notation \cosh désigne la fonction cosinus hyperbolique qui satisfait

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ pour tout } z \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que J admet un minimum global sur K qui est atteint en un unique point que l'on note (x_*, y_*) .
2. Déterminer (x_*, y_*) .
3. On pose $K_2 = \{(x, y) \in V \text{ tel que } y \leq 3 + x \text{ et } y \leq -x + 10\}$. Discuter de l'existence et l'unicité d'un point de maximum de J sur K_2 . Si un ou plusieurs points de maximum existe(nt), déterminez le(s).

Problème : Équation aux dérivées partielles (14 points)

Soit $T > 0$, $\alpha \geq 0$ et u^0 une fonction de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On cherche une fonction u de $[0, T] \times \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R} qui satisfait

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \alpha u(t, x) &= 0 \text{ pour tout } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= u^0(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

En supposant que u^0 est une fonction suffisamment régulière de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , on admet que (1) admet une unique solution u . Dans le cadre de ce problème on pourra supposer toute la régularité nécessaire sur la solution u .

On note $\llbracket m_1, m_2 \rrbracket$ pour $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels inclus dans l'intervalle $[m_1, m_2]$.

Partie I — Différences Finies (8 points)

Dans cette première partie on se propose de résoudre (1) de façon approchée à l'aide d'une méthode de type différences finies. Pour cela on introduit un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$ qui satisfait $T = N\Delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$. On cherche, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et tout $j \in \mathbb{Z}$ à approcher la solution $u(n\Delta t, j\Delta x)$ par une valeur que l'on note u_j^n . On introduit aussi la notation $t^n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$.

I.1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, T]$. En supposant la régularité nécessaire sur u , montrer que

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) = \frac{1}{\Delta x^4} [u(t, x + 2\Delta x) - 4u(t, x + \Delta x) + 6u(t, x) - 4u(t, x - \Delta x) + u(t, x - 2\Delta x)] + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

I.2. On propose le schéma numérique suivant

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u^0(x_j) \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^4} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + (6 + \alpha\Delta x^4)u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \text{ pour tous } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \text{ et } j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2}$$

- (a) S'agit-il d'un schéma explicite, implicite ou centré en temps (variable t) ?
- (b) S'agit-il d'un schéma explicite, implicite ou centré en espace (variable x) ?

- I.3.** Définir l'erreur de troncature (notée η_j^n) du schéma (2) pour le système (1). Montrer qu'il est précis au moins à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.
- I.4.** À partir de cette question, on suppose que la donnée initiale u^0 est périodique de période 1 en espace et on cherche la solution u du système (1) parmi les fonctions périodiques de période 1. Pour cela on se limite à chercher une approximation de la solution pour $x \in [0, 1]$. On suppose que le pas d'espace Δx a été choisi tel que $1 = M\Delta x$ pour un certain $M \in \mathbb{N}$.
- (a) Réécrire le schéma (2) pour le problème périodique, en se limitant à la mise à jour des valeurs (u_j^n) pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, M \rrbracket$.
- (b) Montrer qu'il existe une matrice A telle que, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on peut écrire la formule d'itération du schéma sous la forme

$$U^{n+1} = AU^n,$$

en notant $U^k = \begin{pmatrix} u_0^k \\ \vdots \\ u_M^k \end{pmatrix}$ le vecteur des solutions approchées calculées à l'itération k .

Calculer les coefficients de la matrice A .

- I.5.** Montrer que le schéma proposé à la question I.4 est stable en norme L^2 sous une condition CFL à détailler.

Indication: On rappelle que la norme L^2 de U^k est définie par

$$\|U^k\|_2 = \left(\sum_{j=0}^{M-1} \Delta x |u_j^k|^2 \right)^{1/2}.$$

- I.6.** Comment pourrait-on modifier ce schéma pour le rendre inconditionnellement stable en norme L^2 ? Quel serait la conséquence en termes de coût de calcul?
- I.7.** Montrer que le schéma proposé à la question I.4 n'est pas inconditionnellement stable en norme L^∞ .

Indication: On pourra utiliser un contre-exemple

- I.8.** Pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note e^n le vecteur erreur (pour le schéma proposé à la question I.4) défini par

$$e^n = U^n - \tilde{U}^{n+1} \text{ où } \tilde{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} u(t^{n+1}, x_0) \\ u(t^{n+1}, x_1) \\ \vdots \\ u(t^{n+1}, x_M) \end{pmatrix}.$$

Exprimer e^n en fonction du pas de temps Δt , de la matrice d'itération A et des erreurs de troncature $(\eta_j^k)_{0 \leq j \leq M; 0 \leq k \leq n-1}$. On pourra noter η^k le vecteur

$$\eta^k = \begin{pmatrix} \eta_0^k \\ \vdots \\ \eta_M^k \end{pmatrix}.$$

- I.9.** Démontrer que le schéma est convergent en norme L^2 à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.
- I.10.** On se propose maintenant de résoudre le problème sur $[0, T] \times [0, 1]$ avec des conditions aux limites au bord de l'intervalle $[0, 1]$. Pour cela on remplace la condition de périodicité par la double condition aux limites suivante au bord de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{3}$$

(a) On propose le schéma (4) dans lequel on a introduit les points, dit *fictifs*, u_{-1}^n et u_{M+1}^n .

$$\begin{aligned}
u_j^0 &= u^0(x_j) \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}, \\
u_0^n &= 0 \text{ pour tout } n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\
u_M^n &= 0 \text{ pour tout } n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \\
u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^4} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + (6 + \alpha \Delta x^4)u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n), \\
&\text{pour tous } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket, \text{ où on pose } u_{-1}^n = u_{M+1}^n = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Montrer qu'il s'agit d'une discrétisation précise à l'ordre 1 de la condition aux limites (3).

(b) Proposer un schéma pour lequel la discrétisation de la condition aux limites (3) est précise à l'ordre 2.

Partie II — Différences Finies en temps et Éléments Finis en espace (6 points)

Dans cette deuxième partie on résout de nouveau le système (1) de façon approchée. Cette fois on utilise une discrétisation de type différences finies en temps (variable t) et une discrétisation de type éléments finis en espace (variable x). En espace on se restreindra à l'intervalle $[0, 1]$ et on ajoutera les conditions aux limites homogènes pour u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ aux extrémités de cet intervalle données par (3).

Étant donné $\beta > 0$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^0([0, 1])$, on considère aussi l'équation différentielle d'ordre 4 : trouver $v \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ telle que

$$\begin{aligned}
v''''(x) + \beta v(x) &= g(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1], \\
v(0) &= v(1) = 0, \\
v'(0) &= v'(1) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

On admet que cette équation admet une unique solution v_g et que cette solution dépend continûment de la donnée du second membre g : il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\|v_g''''\|_{L^2([0,1])} \leq C_1 \|g\|_{L^2([0,1])} \text{ pour tout } g \in \mathcal{C}^0([0, 1]).$$

II.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta t = T/N$. Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note $t^n = n\Delta t$ et $u^n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u^n(x) = u(t^n, x)$. (Remarquons que pour $n = 0$ cette notation est en accord avec la condition initiale dans (1).)

Montrer que, pour $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, la fonction u^{n+1} est solution d'une équation de la forme

$$(u^{n+1})''''(x) + \beta u^{n+1}(x) = g(x) + \mathcal{O}(\Delta t).$$

avec $\beta > 0$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne dépend que de α , Δt et u^n .

II.2. On s'intéresse à présent à la résolution approchée des équations de la forme (5). On suppose que l'intervalle $[0, 1]$ a été partitionné en M sous-intervalles de la forme $[x_j, x_{j+1}]$ avec $x_j = jh$ pour $j \in \llbracket 0, M \rrbracket$ et $h = 1/M$. Soit alors V et V_0 les espaces de fonctions définis par

$$V = \{w \in \mathcal{C}^1([0, 1]); w \in \mathcal{C}^2([x_j, x_{j+1}]) \text{ pour } 0 \leq j \leq M-1\},$$

et

$$V_0 = \{w \in V; w(0) = w(1) = 0 \text{ et } w'(0) = w'(1) = 0\}.$$

Montrer que, si $v \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ est solution de (5) alors v est solution de la formulation variationnelle :

$$\text{trouver } v \in V_0 \text{ tel que } a(v, w) = l(w), \text{ pour tout } w \in V_0, \tag{6}$$

où a et l sont les formes bilinéaires et linéaires définies par

$$a(z, w) = \int_0^1 (z''(x)w''(x) + \beta z(x)w(x))dx \text{ et } l(w) = \int_0^1 g(x)w(x)dx \text{ pour tous } w, z \in V_0.$$

II.3. Réciproquement, montrer que si (6) admet une solution v et que $v \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ alors v est aussi solution de (5).

II.4. Montrer que $v \in V_0$ est un minimiseur de la fonctionnelle $J : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - l(w) \text{ pour tout } w \in V_0,$$

si et seulement si v est solution de la formulation variationnelle (6).

II.5. Soit $V_{h,0}$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de V_0 . On introduit le problème variationnel approché :

$$\text{trouver } v_h \in V_{h,0} \text{ tel que } a(v_h, w_h) = l(w_h), \text{ pour tout } w_h \in V_{h,0}. \quad (7)$$

Que peut-on dire de l'existence et de l'unicité d'une solution à ce problème ?

Indication: On pourra introduire une base de l'espace $V_{h,0}$.

II.6. (a) Peut-on choisir pour $V_{h,0}$ l'espace des éléments finis de Lagrange de degré 1 ?

(b) Peut-on choisir pour $V_{h,0}$ l'espace des éléments finis de Lagrange de degré 2 ?

II.7. Dans cette question on introduit l'élément fini d'Hermite qui correspond au choix

$$V_h = \{w \in C^1([0, 1]) \text{ tel que } w|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_3 \text{ pour } 0 \leq j \leq M-1\},$$

et

$$V_{h,0} = \{w \in V_h \text{ tel que } w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0\}.$$

(a) Montrer qu'avec ce choix (7) définit bien une approximation variationnelle interne.

(b) Montrer qu'une fonction de $V_{h,0}$ est définie de façon unique par sa valeur et la valeur que prend sa dérivée aux points x_j pour $j \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket$.

(c) Construire deux familles de fonctions de $V_{h,0}$, notées $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{M-1}\}$ et $\{\Psi_1, \dots, \Psi_{M-1}\}$, telles que

$$\Phi_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ et } \Phi'_i(x_j) = 0, \text{ pour tout } j \in \llbracket 0, M \rrbracket,$$

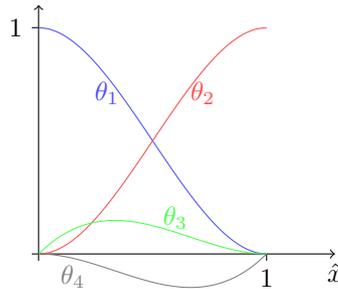
$$\Psi_i(x_j) = 0 \text{ et } \Psi'_i(x_j) = \delta_{ij}, \text{ pour tout } j \in \llbracket 0, M \rrbracket,$$

où on a noté δ_{ij} le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

Indication: On pourra utiliser les fonctions de forme définies par

$$\theta_1(x) = (x-1)^2(2x+1), \quad \theta_2(x) = x^2(3-2x), \quad \theta_3(x) = x(x-1)^2, \quad \theta_4(x) = x^2(x-1),$$

et représentées dans la figure ci-dessous.



(d) Montrer que l'ensemble $\{\Phi_1, \dots, \Phi_{M-1}, \Psi_1, \dots, \Psi_{M-1}\}$ constitue une base de $V_{h,0}$ et proposer un opérateur d'interpolation $r_h : C^4([0, 1]) \rightarrow V_{h,0}$.

(e) Proposer un ordre de numérotation qui vous semble pertinent pour la construction de la matrice de rigidité du problème et justifier votre choix.

II.8. Soit v la solution du problème (6) et v_h la solution du problème (7). Soit $\|\cdot\|_V$ la norme sur V définie par

$$\|w\|_V = \left[\int_0^1 w''(x)^2 dx + \int_0^1 w(x)^2 dx \right]^{1/2}, \text{ pour tout } w \in V.$$

Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\|v - v_h\|_V \leq C_2 \inf \{ \|v - w_h\|_V; w_h \in V_{h,0} \}.$$

II.9. On suppose que l'espace $V_{h,0}$ a été choisi de façon à ce qu'il existe un opérateur d'interpolation $r_h : \mathcal{C}^4([0, 1]) \rightarrow V_{h,0}$ et une constante $C_3 > 0$ tels que

$$\|(w - r_h(w))''\|_{L^2([0,1])} \leq C_3 h^2 \|w''''\|_{L^2([0,1])} \text{ pour tout } w \in \mathcal{C}^4([0, 1]).$$

Montrer le résultat suivant qui est un résultat de convergence à l'ordre 2 en h : il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ indépendante de g et h telle que

$$\|v - v_h\|_{L^2([0,1])} \leq Ch^2 \|g\|_{L^2([0,1])}.$$

où, de nouveau, v est la solution du problème (6) (que l'on suppose être de classe $\mathcal{C}^4([0, 1])$) et v_h est la solution du problème (7).

Indication: On pourra utiliser l'inégalité de Poincaré : il existe une constante C_P telle que

$$\|z\|_{L^2([0,1])} \leq C_P \|z'\|_{L^2([0,1])}$$

pour toute fonction $z \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ telle que $z(0) = z(1) = 0$ et $z \in \mathcal{C}^1([x_j, x_{j+1}])$ pour chaque $j \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$.

Solution

1.

Existence d'un minimum : On applique le Théorème 4.1.3 (Existence d'un minimum en dimension finie).

Les hypothèses sont

- K est un ensemble fermé non vide de \mathbb{R}^2 .
- J est une fonction continue de K à valeurs dans \mathbb{R} .
- J vérifie la propriété "infinie à l'infinie".

Les deux premiers points sont évidents, on démontre le troisième. Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_n, y_n)\| = +\infty$ pour une norme de \mathbb{R}^2 . Alors on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 8y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_n| + 8|y_n|) = +\infty$$

car l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x| + 8|y|$ définit aussi une norme sur \mathbb{R}^2 et toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^2 . De plus, $\lim_{z \rightarrow +\infty} \cosh(z) = +\infty$. Par conséquent on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} J((x_n, y_n)) = +\infty$ et le Théorème 4.1.3 nous donne l'existence d'un point de minimum de J sur K .

Unicité : On applique cette fois la proposition 4.1.6 du cours. Les hypothèses sont

- K est un ensemble convexe (évident en utilisant la définition).
- J est strictement convexe sur K .

On montre que J est strictement convexe en utilisant le fait que \cosh est une fonction strictement convexe : soient $z_1 = (x_1, y_1) \in K$, $z_2 = (x_2, y_2) \in K$ tels que $z_1 \neq z_2$ et $\theta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} J(\theta z_1 + (1 - \theta)z_2) &= \cosh(\theta(x_1 + 8y_1) + (1 - \theta)(x_2 + 8y_2)) \\ &< \theta \cosh(x_1 + 8y_1) + (1 - \theta) \cosh(x_2 + 8y_2) \text{ (stricte convexité de } \cosh) \\ &= \theta J(z_1) + (1 - \theta)J(z_2). \end{aligned}$$

Pour démontrer que \cosh est strictement convexe on peut faire le calcul en utilisant la stricte convexité de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} (ou encore démontrer l'une des propriétés de l'exercice 4.2.4). La conclusion de la proposition 4.1.6 est qu'il existe au plus un point de minimum, qui correspond à un minimum global. On le note (x_*, y_*) .

2.

Soit F l'application définie par $F((x, y)) = 1 - xy$ pour tout $(x, y) \in V$. On minimise J sous la contrainte (de type inégalité) $F((x, y)) \leq 0$. Comme J et F sont dérivables sur K on peut appliquer le théorème 4.2.19. En supposant que la contrainte est qualifiée en $z = (x, y) \in K$, on a que z est un minimum local de J sur K s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$J'(z) + \lambda F'(z) = 0 \text{ et } (\lambda = 0 \text{ si } F(z) < 0).$$

Montrons d'abord que la contrainte est qualifiée en tout point $(x, y) \in K$:

$$\nabla F((x, y)) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \text{ donc } \nabla F((x, y)) = 0 \text{ ssi } (x, y) = (0, 0) \notin K.$$

Par conséquent la contrainte est qualifiée en (x_*, y_*) et il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c} \sinh(x_* + 8y_*) \\ 8 \sinh(x_* + 8y_*) \end{array} \right) + \lambda \begin{pmatrix} y_* \\ x_* \end{pmatrix} &= 0 \text{ et } (\lambda = 0 \text{ si } x_* y_* > 1) \\ \Leftrightarrow -\sinh(x_* + 8y_*) &= \lambda y_* = \lambda x_*/8 \text{ et } (\lambda = 0 \text{ si } x_* y_* > 1) \\ \Rightarrow \lambda &= 0 \text{ ou } y_* = x_*/8. \end{aligned}$$

On peut exclure le cas $\lambda = 0$ car il implique que $\sinh(x_* + 8y_*) = 0$ ce qui est impossible sur K . Ceci signifie que la contrainte est active en (x_*, y_*) , c'est-à-dire $x_* y_* = 1$. Comme de plus $y_* = x_*/8$, on conclut que

$$(x_*, y_*) = \left(\sqrt{8}, \frac{1}{\sqrt{8}} \right).$$

3.

Dans un premier temps on va se placer sur l'ensemble $K'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 + x, y \leq -x + 10\}$. On peut aisément étendre J à cet espace et même à \mathbb{R}^2 en entier en utilisant la définition $J(x, y) = \cosh(x + 8y)$. On continue à employer la lettre J pour désigner cette fonction étendue.

De cette manière on se ramène à la minimisation de la fonction $-J$ qui est continue sur un ensemble fermé, non vide et borné. D'après le théorème 4.1.3, il existe au moins un point de minimum de J sur K'_2 .

L'ensemble K'_2 est défini par quatre contraintes affines de type inégalité. Pour utiliser les notations du poly on pose

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= -x, \\ F_2(x, y) &= -y, \\ F_3(x, y) &= y - x - 3, \\ F_4(x, y) &= y + x - 10. \end{aligned}$$

On applique le théorème 4.2.19. Les contraintes sont affines donc automatiquement qualifiées (Remarque 4.2.18 du poly). Le théorème donne l'existence au(x) point(s) de minimum (\bar{x}, \bar{y}) de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$ tels que

$$\begin{pmatrix} -\sinh(\bar{x} + 8\bar{y}) \\ -8\sinh(\bar{x} + 8\bar{y}) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 \text{ si } \bar{x} > 0 \\ \lambda_2 = 0 \text{ si } \bar{y} > 0 \\ \lambda_3 = 0 \text{ si } \bar{y} < 3 + \bar{x} \\ \lambda_4 = 0 \text{ si } \bar{y} < -\bar{x} + 10 \end{pmatrix}$$

Il faut à présent distinguer les différents cas qui sont les suivants :

- (i) Aucune contrainte n'est active alors $\lambda_i = 0, \forall i$ donc $\sinh(\bar{x} + 8\bar{y}) = 0$ ce qui implique $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Or $(0, 0)$ n'est pas un point de minimum de $-J$ car $-J(0, 0) = 0 > -J(1, 1)$ et $(1, 1) \in K'_2$.
- (ii) Une seule contrainte est active. Prenons par exemple le cas où seule la première contrainte est active. Alors $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ et par la deuxième équation dans le théorème on trouve $\sinh(\bar{x} + 8\bar{y}) = 0$ ce qui implique $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Or, de nouveau, $(0, 0)$ n'est pas un point de minimum de $-J$. On peut traiter les autres cas de façon similaire.
- (iii) Deux contraintes sont actives. Il existe quatre cas où cela se produit
 - Les deux premières contraintes sont actives : c'est le point $(0, 0)$ qui n'est pas un minimum de $-J$.
 - La première et la troisième contrainte sont actives : c'est le point $(0, 3)$.
 - La deuxième et la quatrième contrainte sont actives : c'est le point $(10, 0)$.
 - La troisième et la quatrième contrainte sont actives : c'est le point $(3.5, 6.5)$.
- (iv) Il n'y a aucun point en lequel 3 ou 4 contraintes sont actives.

Il reste donc trois points à examiner. On a $-J(0, 3) = -\cosh(3)$ et $-J(10, 0) = -J(3.5, 6.5) = -\cosh(10)$. Comme $-\cosh(3) > -\cosh(10)$, et que $(-10, 0) \notin K_2$, on conclut que J atteint son maximum en un unique point et que ce point est $(3.5, 6.5)$.

Solution

Partie I

I.1.

On suppose que la fonction $y \mapsto u(t, y)$ est cinq fois dérivable sur \mathbb{R} . On a alors, par la formule de Taylor, les estimations suivantes

$$\begin{aligned} u(t, x + \Delta x) &= u(t, x) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \frac{\Delta x^5}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(t, x) + \mathcal{O}(\Delta x^6), \\ u(t, x - \Delta x) &= u(t, x) - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) - \frac{\Delta x^5}{120} \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(t, x) + \mathcal{O}(\Delta x^6), \end{aligned}$$

ce qui implique (en faisant la somme)

$$u(t, x - \Delta x) + u(t, x + \Delta x) = 2u(t, x) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}(\Delta x^6), \quad (8)$$

et en remplaçant Δx par $2\Delta x$

$$u(t, x - 2\Delta x) + u(t, x + 2\Delta x) = 2u(t, x) + 4\Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{4\Delta x^4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}(\Delta x^6). \quad (9)$$

Finalement, le calcul (9)−4×(8) donne le résultat :

$$u(t, x - 2\Delta x) - 4u(t, x - \Delta x) - 4u(t, x + \Delta x) + u(t, x + 2\Delta x) = -6u(t, x) + \Delta x^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, x) + \mathcal{O}(\Delta x^6),$$

qui est la formule de l'énoncé.

I.2.

On peut mettre la formule qui donne l'itération sous la forme

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{\Delta x^4} + \alpha u_j^n = 0,$$

qui montre qu'elle est explicite en temps et centrée en espace.

I.3.

Pour $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a par définition :

$$\begin{aligned} \eta_j^n &= \frac{u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_j)}{\Delta t} + \frac{u(t^n, x_{j+2}) - 4u(t^n, x_{j+1}) + 6u(t^n, x_j) - 4u(t^n, x_{j-1}) + u(t^n, x_{j-2})}{\Delta x^4} + \alpha u(t^n, x_j) = 0 \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t^n, x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \alpha u(t^n, x_j), \end{aligned}$$

d'après la première question et un développement limité en temps. La fonction u étant solution de l'équation aux dérivées partielles, il reste

$$\eta_j^n = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

ce qui signifie que le schéma est précis à l'ordre (au moins) 1 en temps et 2 en espace.

I.4.

On propose le schéma suivant :

$$\begin{aligned} u_j^0 &= u^0(x_j) \text{ pour tout } j \in \llbracket 0, M \rrbracket, \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^4} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + (6 + \alpha \Delta x^4)u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \text{ pour tous } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 0, M \rrbracket, \\ \text{où on pose } &u_{-2}^n = u_{N-2}^n, u_{-1}^n = u_{N-1}^n, u_{M+1}^n = u_1^n, u_{M+2}^n = u_2^n. \end{aligned} \quad (10)$$

I.6.

Pour obtenir la stabilité inconditionnelle, on propose un schéma implicite en temps :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x^4} (u_{j+2}^{n+1} - 4u_{j+1}^{n+1} + (6 + \alpha\Delta x^4)u_j^{n+1} - 4u_{j-1}^{n+1} + u_{j-2}^{n+1}) \text{ pour tous } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 0, M \rrbracket,$$

avec la même initialisation et les mêmes conditions de périodicité qu'à la question I.4. En effectuant le même travail qu'à la question précédente, on trouve cette fois que la relation de récurrence entre les coefficients dans la décomposition de Fourier est

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k) - \frac{\Delta t}{\Delta x^4} (4 + \alpha\Delta x^4 + 4 \cos(2\Pi k \Delta x)(\cos(2\Pi k \Delta x) - 2)) \hat{u}^{n+1}(k),$$

donc

$$\hat{u}^{n+1}(k) = \left[1 + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x^4} (4 + \alpha\Delta x^4 + 4 \cos(2\Pi k \Delta x)(\cos(2\Pi k \Delta x) - 2))}_{\geq 0 \text{ d'après les calculs de la question précédente}} \right]^{-1} \hat{u}^n(k),$$

et

$$|\hat{u}^{n+1}(k)| \leq |\hat{u}^n(k)|,$$

c'est-à-dire que le schéma est stable sans aucune condition sur les pas de temps et d'espace.

Chaque itération du schéma implicite en temps est plus coûteuse qu'une itération du schéma explicite en temps car il est nécessaire de résoudre un système linéaire avec une matrice de taille $(M+1) \times (M+1)$ (au lieu d'effectuer une multiplication).

I.7.

Pour montrer que le schéma n'est pas inconditionnellement stable en norme L^∞ il suffit de trouver une condition initiale pour laquelle la suite $(\|U^n\|_\infty)_{0 \leq n \leq N}$ n'est pas bornée indépendamment de n , Δt et Δx . On considère la condition initiale $u_j^0 = (-1)^j$. (Elle satisfait la condition de périodicité à condition que $u_0^0 = 1 = u_M^0 = (-1)^M$ c'est-à-dire que M est pair.) On trouve alors :

$$u_j^1 = u_j^0 - \frac{\Delta t}{\Delta x^4} (u_j^0 - 4(-u_j^0) + (6 + \alpha\Delta x^4)u_j^0 - 4(-u_j^0) + u_j^0) \text{ pour tous } n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 0, M \rrbracket,$$

d'où

$$u_j^1 = \left(1 - (16 + \alpha\Delta x^4) \frac{\Delta t}{\Delta x^4} \right) (-1)^j \text{ et par récurrence : } u_j^n = \left(1 - (16 + \alpha\Delta x^4) \frac{\Delta t}{\Delta x^4} \right)^n (-1)^j.$$

Si $16\Delta t/\Delta x^4 + \alpha\Delta t > 2$, on a $1 - (16 + \alpha\Delta x^4)\Delta t/\Delta x^4 < -1$ donc le schéma est instable.

I.8.

$$\begin{aligned} e^n &= U^n - \tilde{U}^n \\ &= AU^{n-1} - A\tilde{U}^{n-1} + A\tilde{U}^{n-1} - \tilde{U}^n \\ &= Ae^{n-1} - (\tilde{U}^n - A\tilde{U}^{n-1}) \\ &= Ae^{n-1} - \Delta t \eta^{n-1} \\ &= A(Ae^{n-2} - \Delta t \eta^{n-2}) - \Delta t \eta^{n-1} \\ &= A^n e^0 - \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} A^k \eta^{n-1-k} \text{ (par récurrence)} \\ &= -\Delta t \sum_{k=0}^{n-1} A^k \eta^{n-1-k} \text{ (car } e^0 = 0 \text{ par l'initialisation).} \end{aligned}$$

I.9.

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_2 &= \Delta t \left\| \sum_{k=0}^n A^k \eta^{n-k} \right\|_2 \\ &\leq \Delta t \sum_{k=0}^n \|A^k \eta^{n-k}\|_2 \\ &\leq \Delta t \sum_{k=0}^n \|A\|_2^k \|\eta^{n-k}\|_2, \end{aligned}$$

où $\|A\|_2$ est la norme (matricielle) de A subordonnée à la norme vectorielle $\|\cdot\|_2$ déjà introduite (voir la définition 3.5.1 du poly) :

$$\|A\|_2 = \sup \left\{ \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2}; y \in \mathbb{R}^{M+1}, y \neq 0 \right\}.$$

Pour montrer la stabilité du schéma, on a montré que sous la condition CFL, on a $\|A\|_2 \leq 1$ (voir (11)). Il reste donc

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_2 &\leq \Delta t \sum_{k=0}^n \|\eta^{n-k}\|_2 \text{ sous la condition CFL} \\ &= \Delta t \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=0}^{M-1} \Delta x |\eta_j^{n-k}|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \Delta t \sum_{k=0}^n \left[\underbrace{M}_{=1} \Delta x \max \left\{ |\eta_j^{n-k}|^2; 0 \leq j \leq M-1 \right\} \right]^{1/2} \\ &= n \Delta t (\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)) \\ &= T(\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)). \end{aligned}$$

Sous CFL, le schéma est convergent en norme L^2 à l'ordre 1 en temps et à l'ordre 2 en espace.

I.10.

La condition aux limites $u(t, 0) = u(t, 1)$ est imposée de façon exacte aux temps t^n par $u_0^n = u_M^n = 0$.

(a) Pour la condition aux limites sur $\partial u / \partial x$, on étend la solution de l'équation à l'intervalle $[-\Delta x, 1 + \Delta x]$ en espace et on introduit les points fictifs $x_{-1} = -\Delta x$ et $x_{M+1} = 1 + \Delta x$ ainsi que les grandeurs u_{-1}^n et u_{M+1}^n pour approcher la valeur de la solution étendue en ces points. Ceci permet de discrétiser la condition aux limites et de rendre complète la formule de mise à jour des valeurs u_1^{n+1} et u_{M-1}^{n+1} .

On fait ensuite le DL à l'ordre 1 en x autour de $x = 0$:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t^n, 0) = \frac{u(t^n, 0) - u(t^n, -\Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) = \frac{u_0^n - u_{-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x),$$

ce qui justifie qu'avec la formule proposée dans l'énoncé on impose $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, 0) = 0$ avec une précision d'ordre 1 en espace. On peut faire le même raisonnement en $x = 1$ pour justifier le choix $u_{M+1}^n = 0$.

(b) Pour l'ordre 2 on fait exactement la même chose mais avec un développement limité à l'ordre 2 :

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}(t^n, 0) = \frac{u(t^n, \Delta x) - u(t^n, -\Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Dans le schéma on impose donc $u_{-1}^n = u_1^n$. Le même raisonnement en $x = 1$ nous dicte d'imposer $u_{M+1}^n = u_{M-1}^n$. Le reste du schéma est inchangé.

Partie II

II.1.

Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. On effectue un développement limité à l'ordre 1 en temps autour du point (t^{n+1}, x) de u :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^{n+1}, x) = \frac{u(t^{n+1}, x) - u(t^n, x)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) = \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t).$$

En injectant cette expression dans (1) évalué en (t^{n+1}, x) , on obtient

$$(u^{n+1})''''(x) + \beta u^{n+1}(x) = g(x) + \mathcal{O}(\Delta t).$$

En négligeant le terme en $\mathcal{O}(\Delta t)$, et en s'assurant que les conditions aux limites sont les mêmes, on trouve que u^{n+1} est solution de l'équation différentielle (5) avec $\beta = \alpha + 1/\Delta t$ et $g = u^n/\Delta t$.

II.2.

Supposons que $v \in \mathcal{C}^4([0, 1])$ est solution de (5). Soit $w \in V_0$, on a

$$\int_0^1 v'''' w + \int_0^1 \beta v w = \int_0^1 g w$$

où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 v'''' w &= \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'''' w \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} \left(- \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'''' w' + [v'''' w]_{x_j}^{x_{j+1}} \right) \quad (\text{ipp avec } v''', w \in \mathcal{C}^1([x_j, x_{j+1}])) \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} v'' w'' - [v'' w']_{x_j}^{x_{j+1}} + [v'''' w]_{x_j}^{x_{j+1}} \right) \quad (\text{ipp avec } v'', w' \in \mathcal{C}^1([x_j, x_{j+1}])) \\
&= \int_0^1 v'' w'' - v''(1)w'(1) + v''(0)w'(0) + v''''(1)w(1) - v''''(0)w(0) \quad (\text{ipp avec } v'' w', v'''' w \in \mathcal{C}^0([0, 1])) \\
&= \int_0^1 v'' w'' \quad (w \in V_0).
\end{aligned}$$

On trouve que v est bien la solution de la formulation variationnelle donnée dans l'énoncé.

II.3.

On suppose à présent que v est solution de la formulation variationnelle et que $v \in \mathcal{C}^4([0, 1])$. On peut faire les mêmes intégrations par parties "à l'envers" et on trouve

$$\int_0^1 (v'''' + \beta v - g)w = 0, \quad \text{pour tout } w \in V_0.$$

Ceci est vrai pour toutes les fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty([0, 1])$. Une application du lemme 3.1.7 donne alors $v'''' + \beta v = g$ sur $[0, 1]$ où on a utilisé la continuité de $v'''' + \beta v - g$. Comme $v \in V_0$ par hypothèse, v satisfait aussi les conditions aux limites de l'équation différentielle.

II.4.

Voir le poly.

II.5.

D'après le lemme 3.1.12 du polycopié, l'approximation variationnelle interne (7) admet une unique solution si la forme bilinéaire a est coercive sur V . Il nous suffit donc de montrer l'existence d'une constante $\nu > 0$ telle que

$$a(w, w) \geq \nu \|w\|_{L^2([0,1])}^2, \quad \forall w \in V_0.$$

Le choix de la norme $L^2([0, 1])$ n'est pas important, on aurait pu choisir une autre norme. Soit $w \in V_0$, la définition de la forme bilinéaire a donne

$$a(w, w) = \int_0^1 w'' w'' + \beta \int_0^1 w w \geq \beta \|w\|_{L^2([0,1])}^2$$

ce qui montre la coercivité de a et donc l'existence et l'unicité d'une solution au problème (7). On peut aussi utiliser l'indication dans l'énoncé pour redémontrer le résultat du lemme 3.1.12.

II.6.

Si on choisit des éléments finis de Lagrange linéaires, le terme $\int_0^1 z'' w''$ vaut 0. Ni les éléments finis de Lagrange de degré 1 ou 2 ne fournissent une approximation variationnelle interne car les fonctions de ces espaces ne sont pas $\mathcal{C}^1([0, 1])$ comme le sont celles de V_0 .

II.7.

(a) Il suffit de remarquer que $V_{h,0} \subset V_0$ et est de dimension finie.

(b) Une fonction de $V_{h,0}$ est bien sûre définie de façon unique par la valeur qu'elle prend sur chacun des intervalles de la discrétisation. Il suffit donc de vérifier qu'un polynôme de degré 3 sur un intervalle est défini de façon unique par sa valeur et la valeur de sa dérivée aux extrémités de l'intervalle. Sans perte de généralité (par le changement de variable $x \mapsto x_j + x\Delta x$) on raisonne sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit un polynôme que l'on note $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. On peut déterminer la valeur des coefficients a, b, c et d en résolvant le système

$$\begin{aligned}
P(0) &= d \\
P'(0) &= c \\
P(1) &= a + b + c + d \\
P'(1) &= 3a + 2b + c.
\end{aligned}$$

(c) Les définitions suivantes conviennent :

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \theta_2\left(\frac{x-x_{i-1}}{\Delta x}\right) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \theta_1\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \theta_4\left(\frac{x-x_{i-1}}{\Delta x}\right) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \theta_3\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

(d) Une fonction de $V_{h,0}$ est définie de façon unique par $2M - 2$ valeurs d'après la question (b) donc la dimension de $V_{h,0}$ est inférieure ou égale à $2M - 2$. Comme la famille que l'on considère est constituée de $2M - 2$ fonctions, il nous suffit de montrer qu'elle est libre pour obtenir que c'est une base de $V_{h,0}$. On le montre facilement en prenant une combinaison linéaire des fonctions Φ_i et Ψ_i et en l'annulant ainsi que sa dérivée aux point x_j .

On propose l'opérateur d'interpolation défini par $r_h(w) = \sum_{j=1}^{M-1} (w(x_j)\Phi_j + w'(x_j)\Psi_j)$, pour tout $w \in \mathcal{C}^4([0, 1])$.

(e) Pour la résolution du système linéaire avec une méthode directe de type factorisation de Cholesky il est intéressant que les coefficients non nuls de la matrice de rigidité soient le plus proches possibles de la diagonale de la matrice. Si on utilise l'ordre de numérotation $[\Phi_1, \Psi_1, \dots, \Phi_{M-1}, \Psi_{M-1}]$, on obtient une matrice de rigidité où les coefficients non nuls se trouvent dans une bande autour de la diagonale. La matrice triangulaire qui intervient dans la factorisation de Cholesky sera aura cette même propriété ce qui limite le coût de stockage et de résolution des systèmes linéaires avec cette matrice et sa transposée.

II.8.

Le lemme de Céa (lemme 3.1.13) donne ce résultat si la forme bilinéaire a est continue et coercive pour la norme V avec la constante $C_2 = M/\nu$ où M est la constante de continuité et ν est la constante de coercivité. Soit $w, z \in V_0$, on a la coercivité de a par

$$a(w, w) = \int_0^1 w''w'' + \beta \int_0^1 ww \geq \min(1, \beta)\|w\|_V^2.$$

et la continuité de a par

$$\begin{aligned} |a(w, z)| &= \left| \int_0^1 w''z'' + \beta \int_0^1 wz \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 w''^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 z''^2 \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \beta w^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \beta z^2 \right)^{1/2} \quad (\text{par Cauchy Schwarz en norme } L^2) \\ &\leq \left(\int_0^1 w''^2 + \int_0^1 \beta w^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^1 z''^2 + \int_0^1 \beta z^2 \right)^{1/2} \quad (\text{par l'identité } ab + cd \leq (a^2 + c^2)^{1/2}(b^2 + d^2)^{1/2}) \\ &\leq \max(1, \sqrt{\beta})\|w\|_V\|z\|_V \end{aligned}$$

Finalement, le lemme de Céa donne le résultat avec $C_2 = \frac{\max(1, \sqrt{\beta})}{\min(1, \beta)}$.

II.9.

Par définition des deux normes on a

$$\|v - v_h\|_{L^2([0,1])} \leq \|v - v_h\|_V.$$

Par la question précédente, puisque $r_h(v) \in V_{h,0}$, il vient

$$\begin{aligned} \|v - v_h\|_V^2 &\leq C_2^2 \|v - r_h(v)\|_V^2 \\ &= C_2^2 \left(\underbrace{\|v - r_h(v)\|_{L^2([0,1])}^2}_{\leq C_P^4 \| (v - r_h(v))'' \|_{L^2([0,1])}^2} + \|(v - r_h(v))''\|_{L^2([0,1])}^2 \right) \\ &= C_2^2 (1 + C_P^4) \|(v - r_h(v))''\|_{L^2([0,1])}^2 \\ &\leq C_3^2 C_2^2 (1 + C_P^4) h^4 \|v''''\|_{L^2([0,1])}^2 \\ &\leq C_1^2 C_3^2 C_2^2 (1 + C_P^4) h^4 \|g\|_{L^2([0,1])}^2, \end{aligned}$$

d'où le résultat demandé avec $C = C_1 C_3 C_2 (1 + C_P^4)^{1/2}$.

Remarque : on peut bien appliquer l'inégalité de Poincaré à $v - r_h(v)$ et $(v - r_h(v))'$.