

F. ALLAIRE

J7

ACTES  
DU TROISIÈME  
COLLOQUE NATIONAL  
EN

**CALCUL  
DES  
STRUCTURES**

20-23 mai 1997  
Giens (Var)

organisé par

**l'Association calcul des structures et modélisation  
(C.S.M.A.)**

et

**le Laboratoire de mécanique et matériaux  
de l'École centrale de Nantes**

Volume I

PRESSES ACADÉMIQUES DE L'OUEST

# OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DE STRUCTURES ELASTIQUES

Grégoire ALLAIRE

*Commissariat à l'Energie Atomique  
DRN/DMT/SERMA, CEA Saclay  
91191 Gif sur Yvette, France*

ℰ

*Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6*

François JOUVE

*Centre de Mathématiques Appliquées  
Ecole Polytechnique  
91128 Palaiseau, France*

**Résumé:** Nous présentons une méthode d'optimisation topologique de structures dans le cadre de l'élasticité linéaire. Il s'agit de trouver la forme d'une structure qui soit à la fois de poids minimal et de rigidité maximale pour les chargements auxquelles elle est soumise. Mathématiquement, nous cherchons à minimiser une somme pondérée du poids et du travail des forces extérieures (la compliance) en fonction de la forme de la structure. Ce problème de minimisation est en fait "mal posé", c'est-à-dire qu'en général il n'existe pas de solution optimale et les solutions calculées par des méthodes numériques classiques sont très dépendantes d'un choix initial de forme et du maillage. Notre méthode est basée sur la théorie de l'homogénéisation qui permet de rendre ce problème bien posé en autorisant, comme forme admissible, les composites obtenues par micro-perforation du matériau élastique original. Nous obtenons ainsi un nouvel algorithme numérique qui permet de capturer sur un maillage fixe une forme optimale. Ce type d'optimisation est dit topologique car aucune restriction explicite ou implicite n'est imposée sur la topologie de la forme optimale qui peut avoir n'importe quel nombre de trous ou de membres.

**Abstract:** We discuss a method for topology optimization of structures in the context of linear elasticity. We seek the optimal shape of an elastic body which is both of minimum weight and maximal stiffness under specified loadings. Mathematically, a weighted sum of the elastic compliance and of the weight is minimized among all possible shapes. This problem is known to be "ill-posed", namely there is generically no optimal shape and the solutions computed by classical numerical algorithms are highly sensitive to the initial guess and mesh-dependent. Our method is based on the homogenization theory which makes this problem well-posed by allowing microperforated composites as admissible designs. A new numerical algorithm is thus obtained which allows to capture an optimal shape on a fixed mesh. Such a procedure is called topology optimization since it places no explicit or implicit restriction on the topology of the optimal shape, i.e. on its number of holes or members.

# 1 Introduction

Le problème type de l’optimisation de formes en mécanique des structures est de trouver la forme “optimale” d’une structure, qui soit à la fois de poids minimal et de rigidité maximale. En général, on demande aussi à la forme optimale de satisfaire des contraintes supplémentaires de faisabilité industrielle ou de coût. Il existe deux approches fondamentales pour calculer ces formes optimales. La première (qu’on peut appeler dimensionnement, ou *sizing* en anglais) consiste à se donner une forme initiale et un certain nombre de noeuds de contrôle sur son bord dont on va optimiser le placement ; on va ainsi modifier l’épaisseur de la structure, l’allure de sa frontière, mais pas sa topologie c’est-à-dire son nombre de trous ou de membres. Au contraire, la deuxième approche (qu’on qualifie de topologique, ou *layout* en anglais) cherche à optimiser le placement des trous et des membres de la structure, aussi bien que leur épaisseur, sans devoir dépendre du choix initial. Evidemment cette deuxième approche est beaucoup plus générale en théorie mais aussi beaucoup plus difficile à mettre en oeuvre en pratique. Néanmoins, on peut citer la théorie des treillis de Michell [17] comme un exemple de cette approche topologique (cf. par exemple [20]).

Nous présentons une méthode d’optimisation topologique basée sur la théorie de l’homogénéisation. Des travaux théoriques fondamentaux sur les liens entre l’optimisation de formes et l’homogénéisation ont paru au début des années 80 (cf. [12], [15], [16], [19]), mais les premiers calculs numériques réalistes ne sont arrivés que plus tard (cf. le travail pionnier de Bendsoe et Kikuchi [9], puis [5], [6], [14], [23]). Pour appliquer en toute rigueur cette méthode d’homogénéisation, nous supposons que le modèle mécanique sous-jacent est celui de l’élasticité linéaire. Par ailleurs, notre mesure de la rigidité globale d’une pièce mécanique sera la compliance, c’est-à-dire le travail des forces extérieures ou bien encore l’énergie élastique. Nous indiquerons brièvement dans la conclusion les généralisations possibles. Une hypothèse essentielle pour mettre en oeuvre la méthode d’homogénéisation est d’omettre (au moins momentanément) toutes les contraintes de faisabilité ou de régularité sur le bord du domaine admissible. En effet, ce type de contraintes proscrieut souvent l’apparition de microstructures perforées dans la recherche d’une forme optimale. Au contraire, la méthode d’homogénéisation utilise de telles microstructures pour trouver une forme optimale.

## 2 Position du problème

Dans cette section nous donnons la formulation originale du problème d’optimisation de formes auquel nous appliquerons la méthode d’homogénéisation. Considérons un domaine de référence borné  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  ( $N = 2, 3$  est la dimension de l’espace), occupé par un matériau élastique, linéaire et isotrope, de loi de Hooke  $A$  définie par

$$A = \left(\kappa - \frac{2\mu}{N}\right)I_2 \otimes I_2 + 2\mu I_4, \quad 0 < \kappa, \mu < +\infty, \quad (1)$$

où  $\kappa$  et  $\mu$  sont respectivement les modules de compression et de cisaillement du matériau. On suppose qu’en l’absence de forces volumiques le domaine  $\Omega$  n’est soumis qu’à un chargement surfacique, noté  $f$ , sur l’ensemble de sa frontière  $\partial\Omega$  (on aurait pu aussi ne l’imposer



que sur une partie de  $\partial\Omega$  et avoir des conditions aux limites de blocage sur l'autre partie). On demande aux forces surfaciques  $f$  de respecter la condition d'équilibre

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot u \, ds = 0,$$

pour tout champ de déplacement  $u(x) = b + Mx$  correspondant à une rotation infinitésimale (avec  $M = -M^t$  matrice antisymétrique).

Une forme admissible  $\omega$  est un sous-ensemble du domaine de référence  $\Omega$  obtenu en pratiquant un ou plusieurs trous dans  $\Omega$ . Les nouvelles frontières ainsi générées sont libres de toute traction. Pour que  $\omega$  soit admissible, il faut aussi que sa frontière  $\partial\omega$  contienne la partie du bord  $\partial\Omega$  où les forces surfaciques  $f$  ne sont pas nulles. On note  $u_\omega(x)$  le champ de déplacement, solution des équations de l'élasticité dans  $\omega$ ,

$$\begin{cases} \sigma_\omega = Ae(u_\omega), & e(u_\omega) = \frac{1}{2}(\nabla u_\omega + \nabla^t u_\omega), \\ \operatorname{div} \sigma_\omega = 0, & \text{dans } \omega, \\ \sigma_\omega \cdot n = f, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \sigma_\omega \cdot n = 0, & \text{sur } \partial\omega \setminus \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

La mesure de la rigidité de la forme  $\omega$  est donnée par sa compliance, définie par

$$c(\omega) = \int_{\partial\Omega} f \cdot u_\omega \, ds = \int_\omega Ae(u_\omega) \cdot e(u_\omega) \, dx = \int_\omega A^{-1} \sigma_\omega \cdot \sigma_\omega \, dx. \quad (3)$$

Le poids de la forme est supposé proportionnel à son volume, noté  $|\omega| = \int_\omega dx$ . Pour balancer les deux objectifs contradictoires de minimisation du poids et de maximisation de la rigidité, on introduit un multiplicateur de Lagrange positif  $\ell > 0$ .

Nous nous intéressons alors au problème d'optimisation de formes qui consiste à minimiser, sur l'ensemble des formes admissibles  $\omega \subset \Omega$ , la somme pondérée de la compliance et du poids. Autrement dit, on cherche une forme optimale qui minimise une fonction objectif  $E(\omega)$

$$\inf_{\omega \subset \Omega} (E(\omega) = c(\omega) + \ell|\omega|). \quad (4)$$

Une réécriture commode du même problème d'optimisation de formes (et qui sera très utile dans la suite) est basée sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire qui fournit la valeur de la compliance

$$c(\omega) = \int_{\partial\Omega} f \cdot u_\omega \, ds = \min_{\substack{\operatorname{div} \sigma = 0, \text{ dans } \omega \\ \sigma \cdot n = f, \text{ sur } \partial\Omega \\ \sigma \cdot n = 0, \text{ sur } \partial\omega \setminus \partial\Omega}} \int_\omega A^{-1} \sigma \cdot \sigma \, dx.$$

Prolongeant le tenseur de contraintes admissible  $\sigma$  par 0 à l'ensemble du domaine  $\Omega$ , la compliance peut être aussi définie par

$$c(\omega) = \min_{\substack{\operatorname{div} \sigma = 0, \text{ dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = f, \text{ dans } \partial\Omega}} \int_\Omega (\chi_\omega(x)A)^{-1} \sigma \cdot \sigma \, dx,$$

où  $\chi_\omega(x)$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $\omega$  (qui vaut 1 si  $x \in \omega$  et 0 sinon). Remarquons qu'aux points où  $\chi_\omega(x)$  vaut 0 nécessairement le minimiseur  $\sigma_\omega$  s'annule aussi. Les minimisation en  $\omega$  et en  $\sigma$  sont bien sûr interchangeables, et le problème original d'optimisation de formes apparaît donc comme une double minimisation en  $\omega$  et  $\sigma$ .

### 3 Formulation homogénéisée

Il est bien connu, qu'en l'absence de contraintes supplémentaires sur l'ensemble des formes admissibles  $\omega$ , la fonction objective  $E(\omega)$  peut ne pas atteindre son minimum, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de forme optimale (cf. [15], [16], [19]). La raison mécanique de ce phénomène générique de non-existence est qu'il est souvent avantageux de faire beaucoup de petits trous (plutôt que quelques grands trous) dans une structure donnée afin d'améliorer sa performance par rapport à la fonction  $E(\omega)$ . Par conséquent, atteindre le minimum peut faire appel à un processus de passage à la limite (lorsque les trous deviennent de plus en plus petits et de plus en plus nombreux) conduisant à une forme "généralisée" (ou homogénéisée) qui est un matériau composite obtenu par microperforation du matériau élastique d'origine.

Afin de prendre en compte ce phénomène mécanique d'optimalité réalisée, non pas par une forme, stricto sensu, mais par un matériau composite, nous devons élargir l'espace des formes admissibles en autorisant, dès le départ, les matériaux composites obtenus par homogénéisation d'un mélange fin du matériau et de vide. Une telle structure composite est déterminée par deux fonctions:  $\theta(x)$ , sa densité volumique locale de matériau (prenant ses valeurs entre 0 et 1), et  $A^*(x)$ , sa loi de Hooke effective correspondant à sa microstructure. Bien entendu, il faut aussi trouver une définition adéquate de la fonction objective homogénéisée  $\tilde{E}(\theta, A^*)$  qui généralise  $E(\omega)$  pour ces structures composites.

Ce procédé de généralisation des formes admissibles est appelé relaxation, ou, dans ce cas particulier, homogénéisation. Il est essentiel de noter que cette relaxation ne change pas la physique du problème. En effet, une forme optimale composite est simplement une moyenne (ou une équivalence en un certain sens) de formes classiques proches de l'optimalité. Mathématiquement, une forme composite optimale n'est que la limite au sens de l'homogénéisation d'une suite minimisante de formes classiques. Intrinsèquement, le problème d'optimisation de formes n'est donc pas modifié. En particulier, toute solution possible du problème original est aussi solution du problème homogénéisé. Pour calculer cette formulation relaxée ou homogénéisée de l'optimisation de formes, on fait appel à la théorie de l'homogénéisation (voir par exemple [10], [21]). L'objectif final est double : d'une part prouver un résultat d'existence pour la formulation relaxée du problème d'optimisation de forme, et d'autre part trouver un nouvel algorithme numérique pour le calcul des formes optimales.

Le résultat de l'homogénéisation est le suivant (pour plus de détails voir [5], [6]). On note  $G_\theta$  l'ensemble de toutes les lois de Hooke correspondant à des matériaux composites de densité  $\theta$ , c'est-à-dire obtenus en perforant le matériau original  $A$  par des trous en proportions  $(1 - \theta)$ . La fonctionnelle homogénéisée ou relaxée est alors donnée par

$$\min_{\substack{0 < \theta < 1 \\ A^* \in G_\theta}} \left\{ \tilde{E}(\theta, A^*) = \tilde{c}(\theta, A^*) + \lambda \int_{\Omega} \theta(x) dx \right\}. \quad (5)$$

où  $\tilde{c}(\theta, A^*)$  est la compliance associée au problème d'élasticité dans le domaine  $\Omega$  pour le composite  $A^*$

$$\tilde{c}(\theta, A^*) = \min_{\substack{\text{div } \sigma = 0, \text{ dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = f, \text{ sur } \partial\Omega}} \int_{\Omega} A^*(x)^{-1} \sigma \cdot \sigma dx. \quad (6)$$



Cette formulation relaxée n'est pas encore entièrement explicite puisque la définition précise de l'ensemble  $G_\theta$  est inconnue ! Cependant, le choix particulier de la compli-  
ance dans la fonction objective permet de la minimiser explicitement en  $A^*$ . Remar-  
quons tout d'abord que l'ordre des minimisations en  $\sigma$  et  $(\theta, A^*)$  est indifférent et que,  
l'homogénéisation étant un phénomène local, la minimisation en  $(\theta, A^*)$  est à effectuer de  
façon indépendante en chaque point  $x$  du domaine. On peut alors réécrire (5) sous la  
forme

$$\min_{\substack{0 < \theta < 1 \\ A^* \in \bar{G}_\theta}} \tilde{E}(\theta, A^*) = \min_{\substack{\text{div} \sigma = 0, \text{ dans } \Omega \\ \sigma \cdot n = f, \text{ sur } \partial \Omega}} \left\{ \int_{\Omega} \min_{\substack{A \in G_\theta \\ 0 \leq \theta \leq 1}} (A^{*-1} \sigma \cdot \sigma + \lambda \theta) dx \right\}.$$

Or, pour un tenseur des contraintes admissible fixé,  $\sigma$ , la minimisation de l'énergie com-  
plémentaire  $A^{*-1} \sigma \cdot \sigma$  sur  $G_\theta$  est un problème classique en homogénéisation qu'on désigne  
sous le nom de problème de bornes optimales sur les propriétés effectives des matériaux  
composites (cf. [2], [6], [7], [11], [12], [13], [18]). Décrivons brièvement sa solution. On  
désigne par  $L_\theta$  une classe particulière de matériaux composites dans  $G_\theta$  qu'on appelle  
les laminés séquentiels. Ces matériaux sont obtenus par mise en couches successives du  
matériau  $A$  et du vide dans des directions et avec des proportions données. Dans ce pro-  
cessus  $A$  joue le rôle d'une matrice et le vide celui d'inclusions ou de trous. L'intérêt  
essentiel de ces matériaux laminés séquentiels est que leur loi de Hooke est donnée par  
une formule explicite (cf. [11]). Soit  $p \geq 1$  le rang du laminé (c'est-à-dire le nombre de  
laminations successives qu'il faut faire pour le construire), soient  $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$  les vecteurs de  
directions des laminations, et soient  $(m_i)_{1 \leq i \leq p}$ , tels que  $0 \leq m_i \leq 1$  et  $\sum_{i=1}^p m_i = 1$ , les  
proportions du matériau  $A$  à chaque étape de lamination. La loi de Hooke  $A^*$  de ce laminé  
séquentiel de rang  $p$  est donnée par

$$A^{*-1} = A^{-1} + \frac{1-\theta}{\theta} \left( \sum_{i=1}^p m_i f_A^c(e_i) \right)^{-1},$$

où  $f_A^c(e_i)$  est un tenseur d'ordre 4 défini, pour toute matrice  $\xi$ , par la forme quadratique

$$f_A^c(e_i) \xi \cdot \xi = A \xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu} |A \xi e_i|^2 + \frac{\mu + \lambda}{\mu(2\mu + \lambda)} ((A \xi) e_i \cdot e_i)^2,$$

avec  $(\mu, \lambda = \kappa - 2\mu/N)$  les coefficients de Lamé de  $A$ . On a alors

$$\min_{A^* \in G_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma = \min_{A^* \in L_\theta} A^{*-1} \sigma \cdot \sigma,$$

et le laminé séquentiel optimal est de rang  $N$  (la dimension d'espace) avec comme directions  
de lamination les directions principales  $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$  du tenseur  $\sigma$ . Si on note  $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq N}$  les  
contraintes principales du tenseur  $\sigma$ , alors les proportions du laminé optimal sont en 2-D

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad (7)$$

et en 3-D, en ordonnant les valeurs propres de  $\sigma$  de telle façon que  $|\sigma_1| \leq |\sigma_2| \leq |\sigma_3|$ , et  
en supposant que  $\lambda = 0$  pour simplifier l'exposition,

$$m_1 = \frac{|\sigma_3| + |\sigma_2| - |\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1| - |\sigma_2| + |\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad m_3 = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2| - |\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad (8)$$

si  $|\sigma_3| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2|$ , et

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_3 = 0 \quad (9)$$

sinon. Cette propriété d'alignement de la microstructure laminée avec les directions principales des contraintes n'est pas un postulat mais plutôt un résultat rigoureux de la théorie de l'homogénéisation. On retrouve ainsi des principes mécaniques bien connus comme celui d'optimalité des structures réticulées de Michell [17].

Après cette étape cruciale, la minimisation par rapport à la densité  $\theta$  est aisément faite à la main, ce qui termine le calcul explicite des paramètres de la forme composite optimale pour un tenseur de contraintes donné  $\sigma$ . Citons simplement pour l'exemple la valeur optimale de la densité en 2-D

$$\theta_{opt} = \min \left( 1, \sqrt{\frac{\kappa + \mu}{4\mu\kappa\ell}} (|\sigma_1| + |\sigma_2|) \right). \quad (10)$$

Seule la minimisation en  $\sigma$  reste à faire numériquement par une méthode d'éléments finis. On peut alors démontrer le théorème suivant (cf. [6] pour le cas 2-D, et [5] pour le cas 3-D)

**Théorème** *La formulation homogénéisée (5) est bien la relaxation du problème d'optimisation de formes (4) car, (i) il existe, au moins, une forme optimale composite  $(\theta, A^*)$  qui minimise (5), (ii) toute suite minimisante de formes classiques  $\omega$  pour (4) converge, au sens de l'homogénéisation, vers un minimiseur  $(\theta, A^*)$  de (5), (iii) les valeurs des minima de l'énergie originale et homogénéisée coïncident*

$$\inf_{\omega \subset \Omega} E(\omega) = \min_{\substack{A^* \in G_\theta \\ 0 \leq \theta \leq 1}} \tilde{E}(\theta, A^*).$$

Plus encore que ce théorème d'existence de solutions, l'intérêt de notre méthode d'homogénéisation provient de l'algorithme numérique d'optimisation qu'on en déduit [5].

## 4 Algorithme numérique d'optimisation de formes

Le principe de notre méthode est de calculer une forme composite optimale pour la formulation homogénéisée (5), plutôt que d'essayer de trouver une forme classique quasi-optimale pour la formulation originale (4). En effet, rappelons que ce problème (4) est mal posé et n'admet pas en général de solution classique. Numériquement, cela veut dire que la minimisation de (4) est très difficile à cause de la présence de nombreux minima locaux : les résultats numériques sont alors très dépendants des conditions initiales et du maillage choisis. Au contraire le problème homogénéisé (5) admet un minimum global. De plus, l'homogénéisation transforme un difficile problème d'optimisation discrète (du type 0/1 selon qu'en un point  $x \in \Omega$  il y a ou non du matériau) en un problème beaucoup plus simple d'optimisation continue (la densité de matériau varie continuellement entre 0 et 1).

Les calculs sont donc effectués sur un maillage fixe du domaine de travail  $\Omega$  sur lequel la forme optimale sera capturée par notre algorithme.

Le problème homogénéisé (5) d’optimisation de formes est, comme on l’a vu, une double minimisation par rapport aux paramètres de formes  $(\theta, A^*)$  et aux tenseurs des contraintes statiquement admissibles  $\sigma$ . Notre algorithme, dit des “directions alternées”, se propose de minimiser alternativement et itérativement dans chacune de ces variables [5] :

- initialisation de la forme  $(\theta_0, A_0^*)$
- itérations  $n \geq 1$  jusqu’à convergence
  - étant donnée une forme  $(\theta_{n-1}, A_{n-1}^*)$ , on calcule les contraintes  $\sigma_n$  par résolution d’un problème d’élasticité linéaire (par une méthode d’éléments finis)
  - étant donné ce tenseur des contraintes  $\sigma_n$ , on calcule les nouveaux paramètres de forme  $(\theta_n, A_n^*)$  avec les formules explicites d’optimalité (7)-(10) faisant intervenir  $\sigma_n$ .

Comme chaque étape de ce procédé itératif est une minimisation partielle, la valeur de la fonction objective décroît toujours, ce qui assure la convergence de la méthode. La partie d’optimisation des paramètres de formes est locale et facile grâce aux formules explicites. Tout l’effort de calcul porte donc sur la résolution d’une succession de problèmes d’élasticité linéaire. De nombreux calculs ont été effectués avec cet algorithme (cf. [1], [3], [4], [5], [6]) qui converge très vite indépendamment du choix initial  $(\theta_0, A_0^*)$  et qui est stable par raffinement du maillage. Nous présentons ici un exemple du type “poutre en flexion” (cf. figure 1).

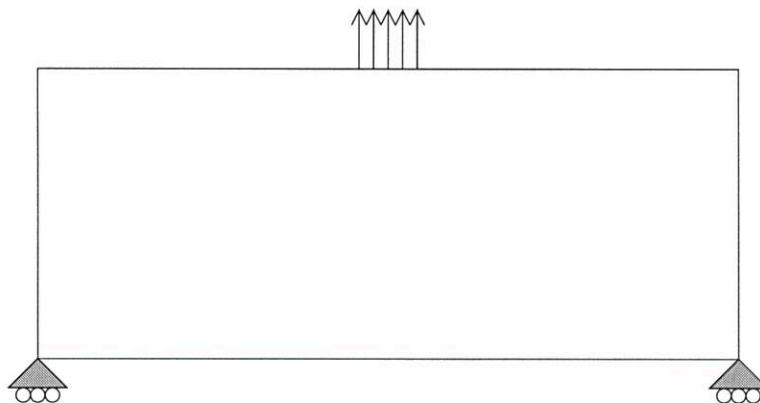


Figure 1: *Chargement d’une poutre 2-D.*

Evidemment, notre algorithme calcule des formes composites (dont on trace la densité sur la figure 2) alors que dans la pratique on préfère obtenir de vraies formes classiques. Le problème est donc de faire disparaître les zones composites (en gris sur les figures) pour retrouver une forme nette (image blanc et noir). Pour cela on introduit une technique de pénalisation des densités intermédiaires qui force la densité à ne prendre que les valeurs



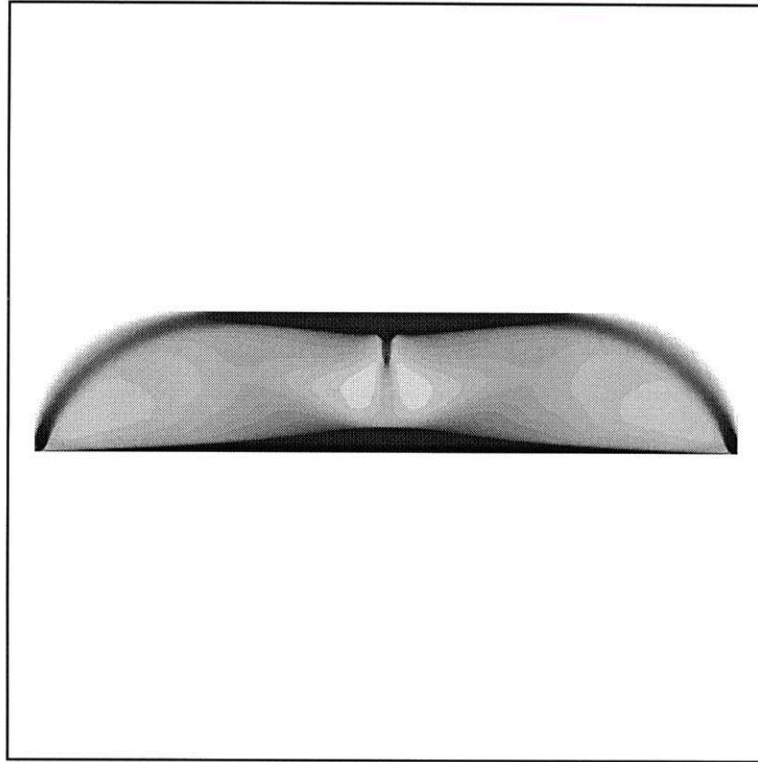


Figure 2: *Poûtre composite optimale.*

0 ou 1. La stratégie est la suivante : après convergence de l'algorithme vers une forme composite optimale, on effectue encore quelques itérations de l'algorithme en pénalisant les densités intermédiaires. On obtient alors une forme classique capturée sur le maillage fixe. La raison du succès (un peu surprenant au premier abord, cf. figure 3) de cette étape de pénalisation est que la forme composite optimale est aussi caractérisée par une microstructure de perforations à l'échelle sous-maille (c'est-à-dire homogénéisée). Le fait de pénaliser les zones composites conduit l'algorithme à reproduire, au moins partiellement, cette microstructure à l'échelle du maillage. La pénalisation apparaît donc comme une projection des formes composites sur des formes classiques. Bien sûr, cette forme classique quasi-optimale ainsi obtenue par projection est très dépendante du maillage. Plus ce dernier sera fin et plus elle inclura de détails liés à l'échelle du maillage. Mais du moins, cette forme classique reste proche du minimum global atteint par la forme composite optimale. Une des propriétés les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir des topologies très complexes de formes optimales sans aucune connaissance a priori de la solution.

Nous renvoyons à [5], [6] pour tous les (nombreux) détails techniques numériques (par exemple, il faut tronquer la densité près de 0 pour éviter une singularité de la loi de Hooke homogénéisée). On peut aussi réintroduire les contraintes technologiques de faisabilité dans l'étape de pénalisation (voir par exemple [8], [22]). Par rapport au travail initial de Bendsoe et Kikuchi [9] qui utilisait comme microstructure une cellule périodique carrée percé d'un trou rectangulaire, notre approche se distingue (entre autres) par l'utilisation de microstructures optimales, à savoir les laminés séquentiels. Il existe de nombreuses généralisations du problème modèle présenté ici. Citons entre autres l'optimisation multi-

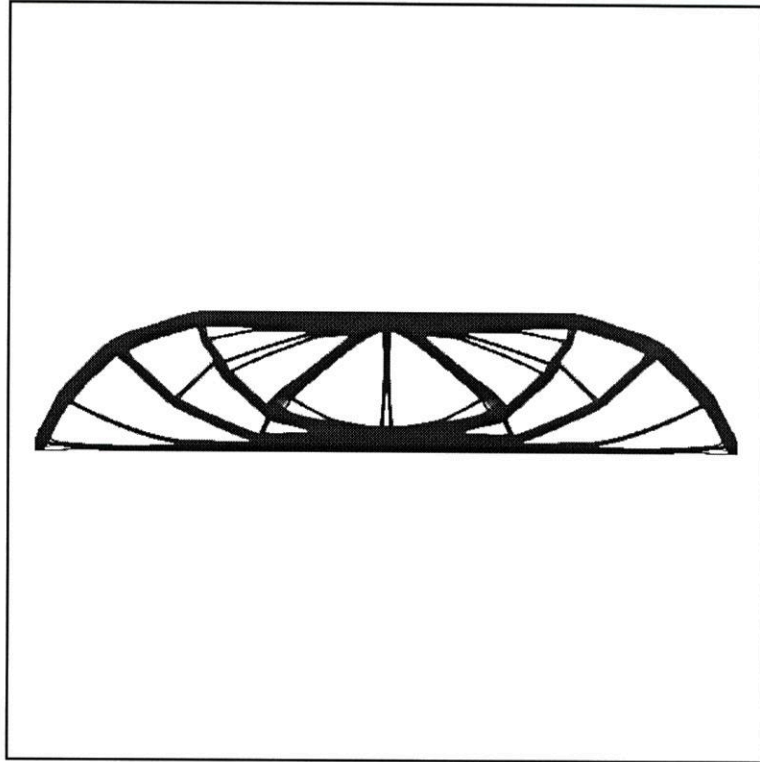


Figure 3: *Poutre optimale après pénalisation.*

chargements (avec plusieurs équations d'état), l'optimisation de fréquences propres de vibration, l'optimisation de modèles de plaques (voir par exemple les références dans [8]).

## 5 Conclusion

On a présenté un algorithme d'optimisation de structures élastiques. Cet algorithme repose sur la théorie de l'homogénéisation qui permet de relaxer le problème en autorisant comme formes admissibles des matériaux composites microperforés. Ces composites sont choisis dans une classe de microstructures optimales, les laminés séquentiels. Pour chaque tenseur des contraintes on connaît explicitement les paramètres des laminés optimaux correspondants. L'algorithme consiste alors à itérer le calcul des contraintes élastiques et celui des paramètres de forme. Par une dernière étape de pénalisation des densités intermédiaires de matériau, on obtient, à partir de la forme composite optimale ainsi obtenue, une forme optimale classique. Cet algorithme permet de capturer sur un maillage fixe une forme optimale dont la topologie n'est pas fixée ni dictée par le choix des conditions initiales. Dans ces conditions cette méthode apparaît comme un préprocesseur d'optimisation topologique avant l'utilisation d'un algorithme classique d'optimisation par variations de frontières.

## Remerciements

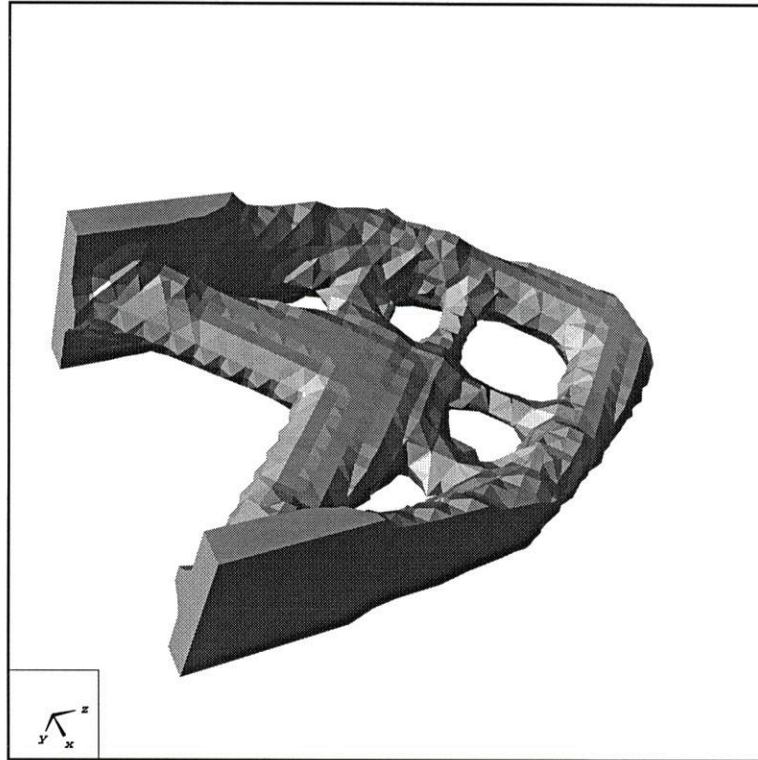


Figure 4: *Console optimale en 3-D (déplacements nuls sur la face de gauche, force ponctuelle dirigée vers la bas au milieu de la face de droite).*

Le travail décrit ici a été effectué en grandes parties avec la collaboration de E. Bonnetier, G. Francfort, et R. Kohn. Qu'ils soient donc remerciés pour leur aide et leur amitié.

## References

- [1] G. Allaire, *Structural optimization using optimal microstructures*, In "MECAMAT 93 International Seminar on Micromechanics of Materials", Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles, Paris (1993).
- [2] G. Allaire, *Explicit lamination parameters for three-dimensional shape optimization*, Control and Cybernetics 23, pp.309-326 (1994).
- [3] G. Allaire, *Relaxation of structural optimization problems by homogenization*, "Trends in Applications of Mathematics to Mechanics", M.M.Marques and J.F.Rodrigues Eds., Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics 77, pp.237-251, Longman, Harlow (1995).
- [4] G. Allaire, Z. Belhachmi, F. Jouve, *The homogenization method for topology and shape optimization. Single and multiple loads case*, Revue Européenne des Eléments Finis, 5, pp.649-672 (1996).



- [5] G. Allaire, E. Bonnetier, G. Francfort, F. Jouve, *Shape optimization by the homogenization method*, à paraître dans *Numerische Mathematik*.
- [6] G. Allaire, R.V. Kohn, *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures*, *Europ. J. Mech. A/Solids* 12, 6, 839-878 (1993).
- [7] M. Avellaneda, *Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites*, *SIAM J. Appl. Math.*, 47, 6, 1216-1228 (1987).
- [8] M. Bendsoe, *Methods for optimization of structural topology, shape and material*, Springer Verlag (1995).
- [9] M. Bendsoe, N. Kikuchi, *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 71, 197-224 (1988).
- [10] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [11] G. Francfort, F. Murat, *Homogenization and Optimal Bounds in Linear Elasticity*, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 94, 307-334 (1986).
- [12] L. Gibianski, A. Cherkaev, *Design of composite plates of extremal rigidity*, Ioffe Physicotechnical Institute preprint (1984).
- [13] L. Gibianski, A. Cherkaev, *Microstructures of composites of extremal rigidity and exact bounds of the associated energy density*, Ioffe Physicotechnical Institute preprint (1987).
- [14] C. Jog, R. Haber, M. Bendsoe, *Topology design with optimized, self-adaptive materials*, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering* 37, 1323-1350 (1994).
- [15] R. Kohn, G. Strang, *Optimal Design and Relaxation of Variational Problems I-II-III*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39, 113-137, 139-182, 353-377 (1986).
- [16] K. Lurie, A. Cherkaev, A. Fedorov, *Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates I,II*, *J. Optim. Th. Appl.* 37, pp.499-521, 523-543 (1982).
- [17] A. Michell, *The limits of economy of material in frame-structures*, *Phil. Mag.*, 8, 589-597 (1904).
- [18] G. Milton, R. Kohn, *Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites*, *J. Mech. Phys. Solids* 36, 6, pp.597-629 (1988).
- [19] F. Murat, L. Tartar, *Calcul des Variations et Homogénéisation*, *Les Méthodes de l'Homogénéisation Théorie et Applications en Physique*, Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF, Eyrolles, 319-369 (1985).
- [20] G. Rozvany, *Structural design via optimality criteria*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1989).
- [21] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous media and vibration theory*, *Lecture notes in physics* 127, Springer Verlag (1980).
- [22] O. Sigmund, *Design of material structures using topology optimization*, PhD thesis, report S 69, Dept. of Solid Mechanics, Technical University of Denmark (1994).

- [23] K. Suzuki, N. Kikuchi, *A homogenization method for shape and topology optimization*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 93, 291–318 (1991).