Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Prolongement de la pression et homogénéisation des équations de Stokes dans un milieu poreux connexe

Grégoire ALLAIRE

Résumé — On considère les équations de Stokes dans un milieu poreux périodique dont la partie solide est connexe. On construit un prolongement de la pression qui reste borné (dans L^2) quand la taille de la période tend vers zéro. Ce prolongement permet de démontrer la convergence de l'homogénéisation des équations de Stokes vers une loi de Darcy.

Pressure's extension and homogenization of Stokes equations in a connected porous medium

Abstract — *We consider the Stokes equations in a periodic porous medium with a connected solid part. We extend the pressure, and this extension is bounded (in L^2) when the period's size tends to zero. This allows us to prove that Stokes equations converge to a Darcy's law.*

Abridged English Version — We deal with the homogenization of Stokes equations, with Dirichlet boundary conditions, in a periodic porous medium such that, in each period of size ε, its solid part is also of size ε. In [7] L. Tartar proved the convergence of the homogenization process to a Darcy's law when the periodic porous medium has a monophasic boundary, and a solid part made of particles which are strictly included in a period. The main tool in his proof is a theoretical construction of a pressure's extension with the help of a duality's argument. On an other hand R. Lipton and M. Avellaneda [4] recently pointed out that Tartar's extension is in fact very natural, *i.e.* in each solid particle the extended pressure is a constant equal to the average pressure in the fluid part of the period which encloses this particle. We generalize those results to the more realistic case of a porous medium which may have a connected solid part distributed through several periods, and also a diphasic boundary.

Let Ω be a connected bounded open set in R^N (with $N \geqq 2$): Ω is the porous medium. Let Ω_ε be its connected periodic fluid part, and $\Omega - \Omega_\varepsilon$ its periodic solid part. We denote by Y_i^ε a period similar to the cube $]-\varepsilon; +\varepsilon[^N$, $Y_{s_i}^\varepsilon$ the period's solid part, and $Y_{f_i}^\varepsilon$ the period's fluid part.

We define the polygonal open sets C_ε and Ω_ε' which respectively approximate Ω and Ω_ε: C_ε is the union of all the periods Y_i^ε entyrely included in Ω, and Ω_ε' is the fluid part of C_ε.

For each $\varepsilon > 0$ we consider the following Stokes problem:

$$(S_\varepsilon) \begin{cases} \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f & in\ \Omega_\varepsilon \\ \nabla . u_\varepsilon = 0 & in\ \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & on\ \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Using the asymptotic expansion method (*see* [2] and [6]) one can heuristically show that the limit of (S_ε), when ε tends to zero, is the Darcy's law (D) (*see* [6]):

$$(D) \begin{cases} u = \bar{A}(f - \nabla p) & in\ \Omega \\ \nabla . u = 0 & in\ \Omega \\ u . n = 0 & on\ \partial\Omega \end{cases}$$

Note présentée par Luc TARTAR.

0249-6291/89/03090717 $ 2.00

where $\bar{A}$ is a constant matrix obtained by a local computation in the period.

We prove here the following results (*see* [1] for details):

THEOREM. — *Let* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *be the solution of* (S_ε). *Define* $P_\varepsilon \in L^2(C_\varepsilon)$ *by:*

(i) $P_\varepsilon = p_\varepsilon$ *in* Ω'_ε;

(ii) *for each period* Y_i^ε *included in* C_ε, P_ε *is a constant in the solid part* $Y_{s_i}^\varepsilon$ *equal to:*

$$P_\varepsilon = \frac{1}{|Y_{f_i}^\varepsilon|}\int_{Y_{f_i}^\varepsilon} p_\varepsilon \quad in\ Y_{s_i}^\varepsilon.$$

Then P_ε *is bounded in* $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

THEOREM. — *Let* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *be the solution of* (S_ε), *and let* P_ε *be defined by the previous Theorem. Then:*

$$\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightharpoonup u \quad in\ [L^2(\Omega)]^N\ weak$$

$$P_\varepsilon \to p\ in\ L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)/R\ strong$$

where (u, p) *is the solution of* (D).

INTRODUCTION. — Dans cette Note on s'intéresse au problème de l'homogénéisation des équations de Stokes (avec une condition aux limites de Dirichlet) dans un milieu poreux périodique Ω dont la partie solide $\Omega - \Omega_\varepsilon$ est, dans chaque période de taille ε, du même ordre de grandeur ε. Dans [7] L. Tartar a démontré que la convergence du procédé d'homogénéisation est acquise si l'on peut prolonger au milieu poreux tout entier la pression qui, *a priori*, n'est définie que dans la partie fluide Ω_ε, et si ce prolongement est borné dans $L^2(\Omega)$. Par un procédé de dualité, L. Tartar construit dans [7] un tel prolongement dans le cas d'un milieu poreux dont la frontière $\partial\Omega$ est monophasique fluide, et dont la partie solide est formée de grains qui sont chacun inclus strictement dans une période de taille ε (cf. *fig.* 1). D'autre part R. Lipton et M. Avellaneda [4] ont récemment montré qu'une telle construction « théorique » revient en fait à prolonger dans chaque « grain » la pression par une constante qui n'est autre que la moyenne de la pression dans la partie fluide de la période qui englobe le grain. Nous étendons ici ces résultats au cas général d'un milieu poreux dont la partie solide peut être connexe et répartie à travers plusieurs périodes (comme dans le cas d'un grillage ou d'un treillis), et dont la frontière $\partial\Omega$ peut être multiphasique (cf. *fig.* 2). Dans [3] et [5] D. Polisevsky a déjà construit, par d'autres méthodes moins générales, un prolongement de la pression qui est seulement borné dans $L^{6/5}(\Omega)$ (en dimension $N=3$), ce qui permet aussi de généraliser le résultat de convergence de L. Tartar dans [7].

I. POSITION DU PROBLÈME. — Soit Ω un ouvert borné connexe de R^N (avec $N \geqq 2$) de frontière $\partial\Omega$. On recouvre Ω d'un maillage régulier constitué de pavés Y_i^ε $[1 \leqq i \leqq N(\varepsilon)]$ tous identiques, à une translation près, au pavé $]-\varepsilon; +\varepsilon[^N$.

On a :

$$N(\varepsilon) = \frac{|\Omega|}{(2\varepsilon)^N}[1 + o(1)].$$

On appelle π_i^ε l'homothétie-translation de rapport $1/\varepsilon$ qui permet de passer de Y_i^ε à $Y =]-1; +1[^N$. On note Y_s un fermé régulier de $\bar{Y}$, et $Y_f = Y - Y_s$ le complémentaire de

Y_s dans Y : Y_s(resp. Y_f) représente la partie solide (resp. fluide) d'une période du milieu poreux. On définit alors :

$$Y_i^\varepsilon = (\pi_i^\varepsilon)^{-1}\, Y$$

$$Y_{s_i}^\varepsilon = (\pi_i^\varepsilon)^{-1}\, Y_s = \text{partie solide de } Y_i^\varepsilon$$

$$Y_{f_i}^\varepsilon = (\pi_i^\varepsilon)^{-1}\, Y_f = \text{partie fluide de } Y_i^\varepsilon.$$

On définit ainsi la partie fluide Ω_ε du milieu poreux Ω :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega - \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} Y_{s_i}^\varepsilon.$$

On définit aussi des ouverts polygonaux C_ε et Ω'_ε qui approchent respectivement Ω et Ω_ε :

$$\bar{C}_\varepsilon = \bigcup_{\{i/Y_i^\varepsilon \subset \Omega\}} \bar{Y}_i^\varepsilon = \text{unions des pavés } Y_i^\varepsilon \text{ entièrement contenus dans } \Omega$$

$$\Omega'_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \cap C_\varepsilon = \text{partie fluide de } C_\varepsilon.$$

On fait les hypothèses suivantes [qu'on désignera par (H)] sur la géométrie du milieu poreux :

– Y_f et Y_s sont de mesures non nulles;

– Y_f est localement situé d'un seul côté de sa frontière, supposée localement lipschitzienne;

– la partie fluide Ω_ε est connexe;

– la frontière entre parties fluide et solide du milieu poreux, *i. e.* $\bar{\Omega}_\varepsilon \cap (\Omega - \Omega_\varepsilon) = \partial\Omega_\varepsilon - \partial\Omega$, est régulière de classe C^1;

– on désigne par K l'ensemble $\{-N, -(N-1), \ldots, -1, 1, \ldots, N-1, N\}$ et par Σ_k et Σ_{-k} les 2 faces de Y orthogonales au k-ième vecteur de base de R^N. On suppose qu'il existe une famille de fonctions $(\varphi_k)_{k \in K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_k \in C^\infty(\bar{Y}) \quad \textit{et} \quad \varphi_k \geqq 0 \\ \varphi_k \not\equiv 0 \quad \textit{sur } \Sigma_k \\ \varphi_k \equiv 0 \quad \textit{sur } Y_s \textit{ et } \Sigma_{k'} \textit{ pour } k' \neq k \\ \varphi_k \textit{ restreint à } \Sigma_k \equiv \varphi_{-k} \textit{ restreint à } \Sigma_{-k}. \end{array}\right.$$

Un cas typique de période Y du milieu poreux, vérifiant les hypothèses (H), est présenté sur la figure 3. Soit $f \in [L^2(\Omega)]^N$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ on sait que le problème de Stokes (2) admet une solution unique :

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in V_\varepsilon \times L_\varepsilon \textit{ tel que:} \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f \quad \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ \nabla . u_\varepsilon = 0 \quad \textit{dans } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{array}\right.$$

Si la frontière $\partial\Omega_\varepsilon$ est localement lipschitzienne, alors on a (*cf.* par exemple [9]) $V_\varepsilon \times L_\varepsilon = [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/R]$, sinon V_ε et L_ε sont des espaces fonctionnels « plus faibles » (*cf.* [9] ou [1]) avec $V_\varepsilon \subset [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N$ et $L_\varepsilon \subset L_{loc}^2(\Omega_\varepsilon)/R$.

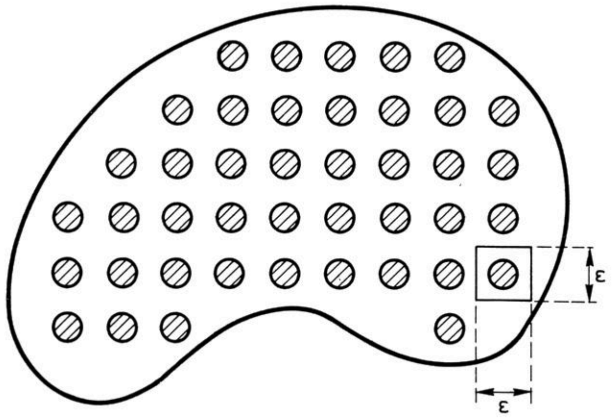

Fig. 1

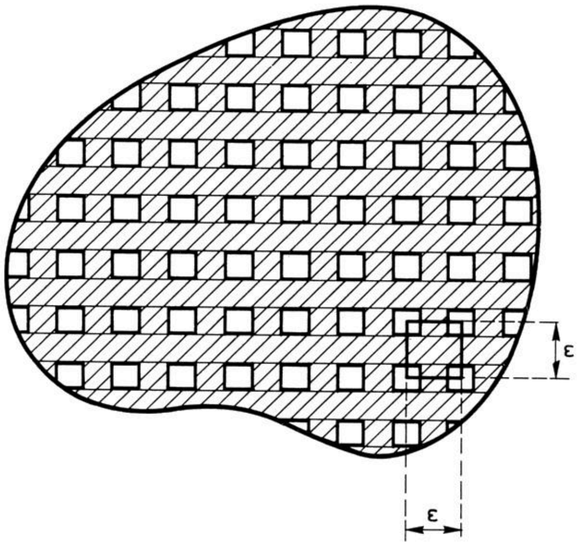

Fig. 2

Fig. 1. — Milieu poreux dont la partie solide (hachurée) n'est pas connexe, et dont la frontière est monophasique.

Fig. 1. — The solid part (hatched) of this porous medium is not connected, and its boundary is monophasic.

Fig. 2. — Coupe d'un milieu poreux dont la partie solide (hachurée) est connexe, et dont la frontière est diphasique.

Fig. 2. — Section of a porous medium: its solid part (hatched) is connected, and its boundary is diphasic.

En utilisant la méthode des développements asymptotiques (*cf.* [2] et [6]) on montre heuristiquement que la « limite » du système (2) lorsque ε tend vers 0 est le système (3) :

$$(3)\qquad \begin{cases} \textit{Trouver } (u, p) \in [L^2(\Omega)]^N \times H^1(\Omega) \textit{ tel que:} \\ \quad u = \bar{A}(f - \nabla p) \quad \textit{dans } \Omega \\ \quad \nabla . u = 0 \quad \textit{dans } \Omega \\ \quad u . n = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\bar{A}$ est une matrice constante, symétrique, définie positive, obtenue à partir d'un calcul local dans Y_f (*cf.*, par exemple, [6], chap. 7). Dans la section suivante on va voir que les solutions de (2) convergent bien vers la solution de (3).

II. Énoncé des résultats. — *Notation.* — On convient de noter $\tilde{.}$ l'opérateur de prolongement par 0 dans $\Omega - \Omega_\varepsilon$ qui opère de $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1. — *Si la géométrie du milieu poreux vérifie les hypothèses* (H), *alors il existe un opérateur linéaire continu* R_ε *tel que :*

(i) $R_\varepsilon \in L([H_0^1(C_\varepsilon)]^N; [H_0^1(\Omega'_\varepsilon)]^N)$;

(ii) $u \in [H_0^1(\Omega'_\varepsilon)]^N \Rightarrow R_\varepsilon \tilde{u} = u$ *dans* Ω'_ε;

(iii) $\nabla . u = 0$ *dans* $C_\varepsilon \Rightarrow \nabla . R_\varepsilon u = 0$ *dans* Ω'_ε;

(iv) *il existe une constante* C *qui ne dépend pas de* ε, *telle que pour tout* $u \in [H_0^1(C_\varepsilon)]^N$ *on a :*

$$\| R_\varepsilon u \|_{L^2(\Omega'_\varepsilon)} + \varepsilon \| \nabla (R_\varepsilon u) \|_{L^2(\Omega'_\varepsilon)} \leqq C [\| u \|_{L^2(C_\varepsilon)} + \varepsilon \| \nabla u \|_{L^2(C_\varepsilon)}].$$

La démonstration est esquissée dans la troisième partie de cette Note (*voir* aussi [1]).

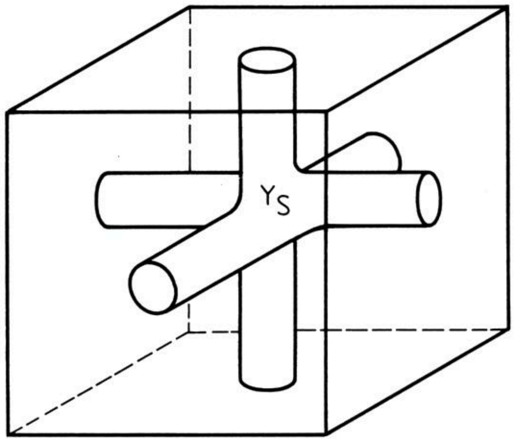

Fig. 3. — Exemple en dimension trois d'une période Y d'un milieu poreux qui vérifie les hypothèses (H).

Fig. 3. — Three-dimensional example of a period Y *of a porous medium which satisfies hypothesis* (H).

THÉORÈME 2. — *Soit* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *la solution unique de* (2), *et soit* $P_\varepsilon \in L^2(C_\varepsilon)$ *la fonction définie par :*

(i) $P_\varepsilon = p_\varepsilon$ *dans* Ω'_ε;

(ii) *dans chaque cellule* Y^ε_i *contenue dans* C_ε, P_ε *est une constante dans la partie solide* $Y^\varepsilon_{s_i}$ *qui vaut :*

$$P_\varepsilon = \frac{1}{|Y^\varepsilon_{f_i}|} \int_{Y^\varepsilon_{f_i}} p_\varepsilon \quad \text{dans } Y^\varepsilon_{s_i}.$$

Alors P_ε *est borné dans* $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

Démonstration. — On combine les idées de L. Tartar [7] et R. Lipton, M. Avellaneda [4]. On définit d'abord, comme dans [7], une fonction q_ε par la formule suivante :

$$\langle \nabla q_\varepsilon, u \rangle_{H^{-1}, H^1_0(C_\varepsilon)} = \langle \nabla p_\varepsilon, R_\varepsilon u \rangle_{H^{-1}, H^1_0(\Omega'_\varepsilon)} \quad \text{pour tout } u \in [H^1_0(\Omega)]^N.$$

Suivant [7] on montre que q_ε est borné indépendamment de ε dans $L^2(C_\varepsilon)$, et donc aussi dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Puis, comme dans [4], on choisit des fonctions tests u particulières (successivement à support compact dans $Y^\varepsilon_{s_i}$ puis dans Y^ε_i) et à l'aide de la définition (4) de R_ε on obtient le résultat.

THÉORÈME 3. — *Soit* $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ *la solution unique de* (2), *et soit* P_ε *défini au théorème* 2. *Alors :*

$$\frac{\tilde{u}_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightharpoonup u \quad \text{dans } [L^2(\Omega)]^N \text{ faible}$$

$$P_\varepsilon \to p \quad \text{dans } L^2_{\text{loc}}(\Omega)/R \text{ fort}$$

où (u, p) *est la solution unique de* (3).

Démonstration. — Une fois acquis le théorème 2, la démonstration du théorème 3 à l'aide de la méthode de l'énergie (*cf.* L. Tartar [8]) est classique (*voir*, par exemple, [7]). La seule différence notable avec [7] est ici la convergence *locale* du prolongement de la pression qui provient de l'absence de régularité de $\partial\Omega_\varepsilon$ au voisinage de $\partial\Omega$ (*cf.* [1]).

III. CONSTRUCTION DE L'OPÉRATEUR R_ε.

LEMME 4. — *Il existe un opérateur linéaire continu* Q_ε *tel que :*

(i) $Q_\varepsilon \in L([H^1_0(C_\varepsilon)]^N; [H^1_0(\Omega'_\varepsilon)]^N)$;

(ii) $u \in [H^1_0(\Omega'_\varepsilon)]^N \Rightarrow Q_\varepsilon \tilde{u} = u$ *dans* Ω'_ε;

(iii) *il existe une constante* C *qui ne dépend pas de* ε, *telle que pour tout* $u \in [H_0^1(C_\varepsilon)]^N$ *on a :*

$$\| Q_\varepsilon u \|_{L^2(\Omega'_\varepsilon)} + \varepsilon \| \nabla (Q_\varepsilon u) \|_{L^2(\Omega'_\varepsilon)} \leqq C [\| u \|_{L^2(C_\varepsilon)} + \varepsilon \| \nabla u \|_{L^2(C_\varepsilon)}].$$

Démonstration. — Il suffit de prendre Q_ε égal à l'opérateur de projection orthogonale de $[H_0^1(C_\varepsilon)]^N$ dans $[H_0^1(\Omega'_\varepsilon)]^N$.

Démonstration du théorème 1. — Pour u fixé dans $[H_0^1(C_\varepsilon)]^N$ on construit $R_\varepsilon u$ dans chaque pavé Y_i^ε entièrement contenu dans Ω comme solution unique de :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } (R_\varepsilon u, q_\varepsilon) \in [H^1(Y_{f_i}^\varepsilon)]^N \times [L^2(Y_{f_i}^\varepsilon)/R] \textit{ tel que:} \\ \nabla q_\varepsilon - \Delta (R_\varepsilon u) = -\Delta u \quad \textit{dans } Y_{f_i}^\varepsilon \\ \nabla . (R_\varepsilon u) = \nabla . u + \dfrac{1}{|Y_{f_i}^\varepsilon|} \displaystyle\int_{Y_{s_i}^\varepsilon} \nabla . u \quad \textit{dans } Y_{f_i}^\varepsilon \\ R_\varepsilon u = Q_\varepsilon u + \dfrac{\varphi_k \circ \pi_i^\varepsilon}{\displaystyle\int_{(\pi_i^\varepsilon)^{-1}\Sigma_k} \varphi_k \circ \pi_i^\varepsilon} \left[\displaystyle\int_{(\pi_i^\varepsilon)^{-1}\Sigma_k} (u - Q_\varepsilon u) . e_k \right] e_k \quad \textit{sur } (\pi_i^\varepsilon)^{-1} \Sigma_k \\ R_\varepsilon u = 0 \quad \textit{sur } \partial Y_{s_i}^\varepsilon. \end{array}\right.$$

Il est aisé de vérifier que les données de (4) satisfont à la relation de compatibilité :

$$\int_{Y_{f_i}^\varepsilon} \nabla . (R_\varepsilon u) = \int_{\partial Y_{f_i}^\varepsilon} R_\varepsilon u . n.$$

Le système (4) admet donc une solution unique. On vérifie alors que $R_\varepsilon u$ « se recolle » sur les faces communes de 2 pavés Y_i^ε adjacents [grâce à (1)], et donc $R_\varepsilon u$ appartient bien à $[H_0^1(\Omega'_\varepsilon)]^N$. Les autres propriétés de R_ε énoncées dans le théorème 1 s'obtiennent facilement à partir de (4).

Note remise le 28 mars 1989, acceptée le 12 juin 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. ALLAIRE, Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium, *Asymptotic Analysis* (à paraître).
[2] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, 1978.
[3] H. I. ENE et D. POLISEVSKY, *Thermal flow in porous media*, D. Reidel Publishing Company, 1986.
[4] R. LIPTON et M. AVELLANEDA, A Darcy law for slow viscous flow past a stationnary array of bubbles, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* (soumis).
[5] D. POLISEVSKY, On the homogenization of fluid flows through porous media, *Rend. Sem. Mat. Univ., Politecn. Torino*, 44, (3), 1986, p. 383-393.
[6] E. SANCHEZ-PALENCIA, Non homogeneous media and vibration theory, *Lecture notes in physics*, 127, Springer Verlag, 1980.
[7] L. TARTAR, Convergence of the homogenization process, *Appendice de* [6].
[8] L. TARTAR, *Cours Peccot au Collège de France*, mars 1977.
[9] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1979.

Centre d'Études nucléaires de Saclay,
I.R.D.I./D.E.M.T., S.E.R.M.A./L.E.T.R., Bât. n° 70, 91191 *Gif-sur-Yvette Cedex.*